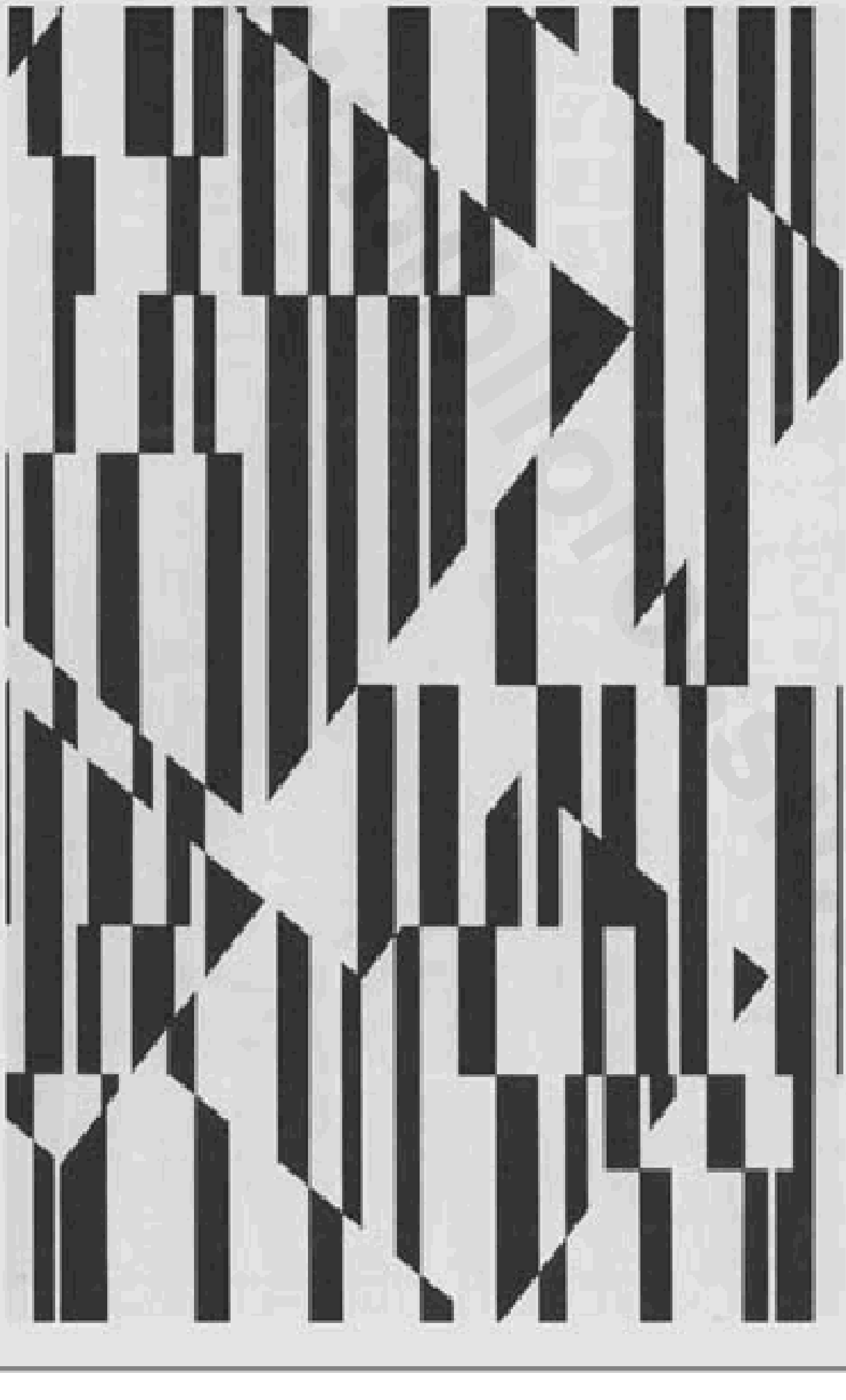
В.А. Бочаров
В.И. Маркин

СИЛЛОГИСТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ



СИЛЛОГИСТИЧЕСКИЕ
ТЕОРИИ

В.А. Бочаров
В.И. Маркин

СИЛЛОГИСТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

Прогресс-Традиция
МОСКВА

ББК 87.4
УДК 16
Б 72

*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского гуманитарного научного фонда (РГНФ)
проект № 10-03-16023д*

В.А. Бочаров, В.И. Маркин.
Б 72 Силлогистические теории. – М.: Прогресс-Традиция, 2010. – 336 с.

ISBN 978-5-89826-361-4

Монография является итогом многолетних исследований силлогистических теорий с точки зрения символической логики. Дается детальная классификация систем силлогистики в зависимости от выразительных возможностей их языков и принимаемых в них условий истинности категорических высказываний. Осуществляется формальная реконструкция ряда имеющихся в истории логики силлогистик – силлогистик Аристотеля, Л. Кэрролла, Б. Больцано, Дж. Венна, Н.А. Васильева, а также традиционной и фундаментальной силлогистики. Устанавливаются метатеоретические взаимосвязи между различными системами силлогистики, а также между силлогистиками и современными логическими теориями. Для нескольких систем силлогистики предлагаются адекватные интенсиональные семантики. Впервые ставится и исследуется проблема полноты множества логических констант в силлогистической теории.

УДК 16
ББК 87.4

На переплете: В. Вазарели «От–От»

ISBN 978-5-89826-361-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Высшей формой знания является теоретическое знание, т.е. знание, представленное в форме той или иной теории. Историческое развитие теоретического знания сложилось таким образом, что одной из самых первых теорий оказалась логическая теория, получившая название *силлогистика*. Последняя была построена одним из крупнейших представителей древнегреческой философии Аристотелем (384–322 гг. до н. э.).

Сам термин «силлогизм» (от греч. *συλλογι΄ζομαι* – рассчитываю, считаю) может быть переведен на русский язык как «вычисление». Соответственно, термин «силлогистика» может трактоваться как синонимичный русскому слову «исчисление». Возможность подобной трактовки указанного термина весьма примечательна, поскольку, по нашему мнению, силлогистика как раз и являлась одним из первых формальных исчислений, появление которого ознаменовало создание логики как науки.

Логика прошла долгий и сложный путь становления и развития. В зависимости от конкретно-исторических условий и накопленных знаний неоднократно менялись представления о целях и задачах данной дисциплины, о предмете ее исследования. Тем не менее, несмотря на все трансформации, в ней всегда имелось некоторое ядро, которое составляло основу любого логического учения. Таким ядром являлась и до сих пор остается *теория дедукции* – учение о правильных, корректных способах рассуждений. При этом в течение долгого времени (вплоть до середины XIX века) в данной области логических знаний имелась единственная в достаточной степени разработанная логическая система – силлогистика.

Относительная простота и элегантность силлогистики среди других известных на сегодняшний день дедуктивных теорий, кажущаяся самоочевидность устанавливаемых в ней логических законов, формулировка которых осуществляется почти на естественном языке, делают ее удобным средством приобщения людей к элементарной логической культуре, позволяют познакомиться с основными логическими идеями, результатами и техникой вывода. Рассматриваемая в этом аспекте силлогистика имеет достаточно прозрачную семантику и несложные критерии различения правильных и неправильных способов рассуждения. Однако, несмотря на чисто практическую (прагматическую) простоту этой дедуктивной системы, при теоретическом исследовании силлогистики возникает круг весьма серьезных проблем, требующих нетривиальных решений. В этом читатель сможет неоднократно убедиться при знакомстве с содержанием монографии.

Построение силлогистики оказалось чрезвычайно значимым как для развития философии, так и для развития других дедуктивных наук. Обращаясь к последней стороне дела отметим, что, во-первых, силлогистика дала образец построения дедуктивной теории, а во-вторых, та методология аксиоматического знания, которая была развита Аристотелем на примере построенной им силлогистики, позволила, с одной стороны, теоретически осмыслить особенности аксиоматического метода, а с другой – дала возможность осознано применять этот метод. Так, например, первая аксиоматическая система геометрии была создана Эвклидом (рубеж IV–III вв.) в духе тех принципов построения и исследования дедуктивных систем знания, которые сформулировал Аристотель применительно к силлогистике.

Что касается значения силлогистики для философии, то трудно представить себе современного философа, который хоть в какой-то степени не был бы знаком с нею. Изучение этой системы всегда было необходимым элементом философского образования. Оставаясь в течение долгого времени единственным известным аппаратом дедукции, она во многом предопределяла характер и направленность исследований в области теории познания. Например, такие хорошо известные в истории философии оппозиции, как «содержательное и формальное», «дискурсивное и чувственное», «рациональное и иррациональное», «интуитивное и рассудочное» всегда обсуждались с учетом гносеологического материала, фиксирующегося силлогистикой. Последняя при этом выступала в качестве конкретного примера одной из сторон указанных противоположностей. Поэтому она не только была теорией выводов и доказательств, но и выполняла кардинальную объяснительную функцию при решении гносеологических проблем.

В данной работе термины «силлогизм» и «силлогистика» будут употребляться в более узком смысле, чем это обычно принято. Так, уже самим Аристотелем были построены два варианта силлогистики – модальная и ассерторическая. Предметом настоящего исследования является ассерторическая силлогистика, за рамки которой не предполагается выходить. Это, естественно, влечет за собой ограниченное использование упомянутых терминов. Кроме того, в учебной и научной литературе термин «силлогизм» зачастую употребляется и для обозначения таких приемов рассуждения, которые в настоящее время исследуются в рамках логики высказываний. Например, говорится о

так называемых условно-категорических, разделительно-категорических силлогизмах и т.п. Подобное употребление термина «силлогизм» нежелательно. Мы сохраняем его для обозначения способов рассуждений в системах аристотелевского типа, где анализируются выводы из так называемых атрибутивных высказываний, например, высказываний видов «Все *S* суть *P*», «Ни один *S* не суть *P*», «Некоторые *S* суть *P*», «Некоторые *S* не суть *P*».

В конце 70-х годов в Советском Союзе сложилось несколько крупных логических школ, в которых активно проводились исследования по ассерторической и модальной силлогистике. К их числу относятся московская и ленинградская школы, представленные в основном преподавателями кафедр логики соответствующих университетов и сотрудниками сектора логики Института философии АН СССР, а также тбилисская логическая школа в лице преподавателей Тбилисского государственного университета и сектора логики Института философии Академии наук Грузии. В ходе этих исследований были получены интересные результаты, которые до сих пор остаются известными достаточно узкому кругу специалистов в нашей стране. В предлагаемой вниманию читателей книге будут систематически изложены результаты многолетних исследований силлогистических теорий, которые получены непосредственно авторами этой работы. В то же время по ходу изложения материала будут упоминаться и описываться и некоторые результаты других исследователей.

Вплоть до настоящего времени в логической литературе бытует сложившееся весьма устойчивое мнение о бедности силлогистики как логической теории. Часто говорится и пишется, что силлогистика является теорией лишь общих терминов, которые в обязательном порядке не должны быть к тому же пустыми и универсальными; что это теория лишь атрибутивных высказываний, т.е. она не занимается анализом высказываний об отношениях, что созданная трудами Буля, Де Моргана, Фреге, Рассела, Гильберта и многих других исследователей современная символическая (математическая) логика ввела в оборот аппарат дедукции, который принципиально несовместим с силлогистикой и превосходит ее по своей мощи.

Наши исследования и исследования других представителей указанных выше научных школ показывают, что данные расхожие мнения не вполне соответствуют действительности. Стало совершенно ясно, что эти мнения основывались на сравнении современной символической логики с действительно весьма бедной, так называемой школьной силлогистикой. На самом же деле можно строить и модифицировать силлогистику таким образом, что в ней станет возможно работать с любыми терминами (в том числе с пустыми и универсальными). Более того, в силлогистических теориях можно работать не только с общими, но и сингулярными терминами. Было показано, что силлогистика допускает такие свои расширения, которые в некотором смысле эквивалентны булевой алгебре. Таким образом, было выяснено, что развитие современной логики, становление которой, как известно, началось с создания именно булевой алгебры, могло бы быть в принципе осуществлено и на базе силлогистики. Было показано также, что определенные модификации силлогистики эквивалентны онтологии Лесневского, т.е. эквивалентны теории, которая по силе своего дедуктивного аппарата не слабее исчисления предикатов. Все это лишает основательности мнение о слабости силлогистики по отношению к современной логике.

Особо отметим те изложенные в монографии результаты, которые показывают связь силлогистики со свободными логиками, а также построение на ее базе особой интенсиональной логики, в которой термины обозначают не классы предметов, обладающих теми или иными признаками, а множества самих этих признаков.

В качестве исторического источника сведений по аристотелевской силлогистике используется Корпус сочинений Аристотеля, который впервые был собран главой школы перипатетиков Андроником Родосским, был объединен им под общим названием *Organika biblia*, или просто «Органон». В него вошли следующие трактаты: «Аналитики» («Первая Аналитика» и «Вторая Аналитика»), «Категории», «Об истолковании», «Топика», «О софистических опровержениях». Для данной работы наиболее значима книга первая «Первой Аналитики». Именно здесь осуществляется развернутое описание силлогистики как дедуктивной системы. Тем не менее, мы будем обращаться и к другим логическим произведениям Аристотеля, содержащим важные моменты для понимания силлогистики. Тексты Аристотеля цитируются, в основном, по четырехтомному изданию его произведений на русском языке, осуществленному издательством «Мысль» (см. [1]).

Данная монография является продуктом коллективного творчества авторов, все ее разделы подвергались детальному совместному обсуждению. Вместе с тем, сами конкретные научные результаты и метатеоретические доказательства получены, как правило, единолично. Результаты В.А. Бочарова отражены в главах II, IX и X (§§1–2), а результаты В.И. Маркина в главах III–V, VII–VIII, X (§3) и XI. Глава VI существенно опирается на результаты исследований А.А. Ильина.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИЛЛОГИСТИКЕ

§ 1. Основные понятия и язык силлогистики

В силлогистике исследуются логические связи между *атрибутивными высказываниями* – высказываниями о факте или характере наличия или отсутствия некоторого свойства (атрибута, признака) у отдельного предмета или предметов некоторого класса. Термин, представляющий предмет или класс предметов, которым предицируется (приписывается) свойство, называется *субъектом* атрибутивного высказывания, а термин, представляющий свойство, – его *предикатом*.

В основу классификации атрибутивных высказываний могут быть положены различные основания. По *количеству* атрибутивные высказывания делятся на *единичные*, в которых признак предицируется отдельному предмету и субъектом которых является *сингулярный* термин (например, собственное имя), и *множественные*, в которых утверждение относится к предметам некоторого класса, а субъект выражен так называемыми обобщающими терминами, которые далее будут именоваться *универсалиями*. Среди множественных высказываний выделяют *общие* (содержащие квантор общности) и *частные* (содержащие квантор существования) высказывания. По *качеству* рассматриваемые высказывания делятся на *утвердительные*, указывающие на наличие свойства (в них присутствует *утвердительная предицирующая связка «есть»*), и *отрицательные*, указывающие на отсутствие свойства у предметов (в них присутствует *отрицательная предицирующая связка* «не есть»). По *модальности* атрибутивные высказывания делятся на *ассерторические*, фиксирующие лишь сам факт присущности или не присущности свойства, и *модальные*, указывающие на характер предикации – необходимый, возможный или случайный. Атрибутивные ассерторические высказывания называют *категорическими* (от греческого «*categoria*», что можно перевести на русский язык термином «сказывание»).

К настоящему времени силлогистика сформировалась как совокупность различных логических систем, которые можно подразделить на классы в зависимости от того, атрибутивные высказывания каких типов имеют формальные аналоги в языке системы, а также в зависимости от того, какого типа термины могут являться субъектами и предикатами этих высказываний.

Силлогистика как строгая логическая теория была создана Аристотелем. Сам Аристотель и средневековые логики рассматривали два типа силлогистических теорий – *ассерторическую* и *модальную силлогистики*. Ассерторическая силлогистика представляет собой совокупность теорий вывода из категорических, ассерторических высказываний. В язык модальной силлогистики входят как ассерторические, так и модальные высказывания. В данной работе, как уже говорилось, мы ограничимся рассмотрением ассерторической силлогистики.

Итак, в ассерторической силлогистике исследуются различного рода логические отношения между категорическими высказываниями следующих логических форм:

1. Всякий S есть P – *общеутвердительные*,
2. Всякий S не есть P – *общеотрицательные*,
3. Некоторый S есть P – *частноутвердительные*,
4. Некоторый S не есть P – *частноотрицательные*,
5. v есть P – *единичноутвердительные*,
6. v не есть P – *единичноотрицательные*.

В средние века высказывания первых четырех типов получили специальные обозначения: общеутвердительные стали называть высказываниями типа ***a*** (первая буква латинского слова «*affirmo*» – утверждаю), частноутвердительные – высказываниями типа ***i*** (вторая гласная в том же слове), общеотрицательные стали называть высказываниями типа ***e*** (первая гласная буква в слове «*nego*» – отрицаю), а частноотрицательные – высказываниями типа ***o*** (вторая гласная в данном слове). Эти обозначения оказались удобным средством формальной записи категорических высказываний. Пользуясь ими, мы будем далее выражать логическую структуру высказываний первых четырех типов следующими формулами: ***SaP***, ***SeP***, ***SiP*** и ***SoP***. Сами знаки ***a***, ***e***, ***i*** и ***o*** могут рассматриваться в качестве особого рода логических символов, образующих формулу из пары универсалий. Эти знаки принято называть *силлогистическими константами*.

С семантической точки зрения различают два типа терминов – *универсалии*, представляющие обычно классы предметов (например: «существо, наделенное разумом»), и *сингулярные термины*, обозначающие отдельные предметы или единичные классы (например, «основатель логики»). Системы ассерторической силлогистики, в языке которых на места субъектов и предикатов категорических высказываний допускаются только универсалии, образуют *чистую силлогистику*. Теории вывода из категорических высказываний, в составе кото-

рых имеются как универсалии, так и сингулярные термины, образуют *сингулярную силлогистику*.

С синтаксической точки зрения универсалии могут быть *простыми* (в их составе не выделяются другие термины) и *сложными* (в их составе имеются другие термины). Сложные термины образуются из простых с помощью *терминообразующих операторов* – терминного отрицания, терминной конъюнкции, терминной дизъюнкции и др. Соответственно различают следующие разновидности сложных терминов: отрицательные (например, «существо, не наделенное разумом»), конъюнктивные (например, «философ и древний грек»), дизъюнктивные (например, «древний грек или римлянин») и др.

Позитивной силлогистикой называют совокупность таких теорий выводов, в которых не учитывается внутренняя структура терминов и потому в языке этих теорий нет терминообразующих операторов. Если в языке теории содержится единственный терминообразующий оператор – терминное отрицание (т.е. различают два типа терминов – положительные и отрицательные), то данная система относится к *негативной силлогистике*. *Расширенную силлогистику* составляют теории выводов из высказываний как с простыми, так и различного рода сложными субъектами и предикатами.

Следует отметить, что позитивная, негативная и расширенная силлогистика может быть как чистой (если на места субъектов и предикатов допускаются только универсалии), так и сингулярной (в том случае, когда в составе исследуемых категорических высказываний встречаются также и сингулярные термины).

Особую группу составляют *кванторные силлогистики*. В их язык вводятся переменные по универсалиям, а также кванторы общности и существования, позволяющие эти переменные связывать. Выразительные возможности таких систем сопоставимы с второпорядковой логикой предикатов.

В традиционной логике силлогистику рассматривали исключительно как теорию выводов из атрибутивных высказываний, поэтому в ее язык не включали пропозициональных связок. Правда, ряд силлогистических рассуждений, например, некоторые выводы по логическому квадрату требуют введения в язык по крайней мере одной пропозициональной связки – отрицания. В современной логике после пионерской работы Я. Лукасевича [32] системы силлогистики обычно формулируют как особые кванторные теории, надстраиваемые над логикой высказываний, и в их язык включают пропозициональные связки.

Каждому типу силлогистик сопоставляется свой формализованный язык с соответствующими выразительными возможностями. Рассмотрим для начала языки чистых силлогистик – силлогистик без сингулярных терминов (языки сингулярных силлогистик будут подробно заданы в главах VII и VIII).

Алфавит стандартных систем чистой силлогистики содержит:

(1) нелогические символы единственного типа – простые универсалии;
(2) логические символы как минимум двух типов – силлогистические константы *a*, *e*, *i*, *o* и пропозициональные связки $\neg$, &, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, а также (возможно пустое) множество терминообразующих операторов, которые образуют универсалии из других универсалий;
(3) технические символы – левую и правую скобки.

В языке чистых силлогистик имеется два типа правильно построенных выражений – универсалии и формулы. Знаки S, R, T, Q, P, M, S_1,… будем использовать в качестве метапеременных по универсалиям, а знаки **A**, **B**, **C**, **D**, $\mathbf{A}_1$,… – в качестве метапеременных по формулам.

Разновидности чистой силлогистки – позитивная, негативная и расширенная – различаются, во-первых, множествами вводимых в алфавит терминообразующих операторов и, во-вторых, определениями универсалий.

Язык чистой позитивной силлогистики вообще не содержит терминообразующих операторов. К числу универсалий здесь относятся только простые универсалии из алфавита.

В алфавит языка чистой негативной силлогистики добавляется символ терминного отрицания ~. Универсалиями тут являются все простые универсалии, а также выражения вида $\sim S$, где S – произвольная универсалия.

В алфавите языка чистой расширенной силлогистики имеются следующие терминообразующие операторы: терминное отрицание (~), терминная конъюнкция ($\times$) и терминная дизъюнкция (+). Множеству универсалий данного языка составляют простые универсалии и выражения видов $\sim S$, $(S \times P)$, $(S+P)$, где S и P – произвольные универсалии.

Определение формулы для всех разновидностей стандартных систем чистой силлогистики задается одинаково:

1. Если S и P – универсалии, то SaP, SeP, SiP, SoP – формулы;

2. Если **A** – формула, то $\neg$**A** – формула;
3. Если **A** и **B** – формулы, то (**A** & **B**), (**A** $\vee$ **B**), (**A** $\supset$ **B**), (**A** $\equiv$ **B**) – формулы.
4. Ничто иное не является формулой.

Укажем еще на два чисто семантических членения силлогистических теорий. Согласно первому из них, они подразделяются на *экзистенциальные* – те, в которых на все универсалии исходно накладывается ограничение объемной непустоты, и *неэкзистенциальные*. Ясно, что универсум рассуждения для экзистенциальных силлогистик должен быть в обязательном порядке непустым. Термин же «неэкзистенциальные силлогистики» будем употреблять в двух смыслах: (1) *свободные силлогистики* – силлогистики, в которых не накладывается никаких ограничений на непустоту терминов, и (2) *универсальные* силлогистики, в которых допускается пустота универсума. Второе членение подразделяет все силлогистики на *экстенсиональные* и *интенсиональные*. В экстенсиональных силлогистиках универсалиям сопоставляются в качестве значений, как было отмечено, классы предметов. В интенсиональных же силлогистических теориях возможными значениями универсалий являются множества признаков.

При рассмотрении семантических проблем, связанных с силлогистикой, для наглядного представления смыслов категорических высказываний и формулировки условий их истинности и ложности обычно используются объемные диаграммы, с помощью которых можно задать полный перечень отношений между терминами. Все возможные отношения между двумя терминами, например S и P, по объему задаются следующими 15 *модельными схемами*:

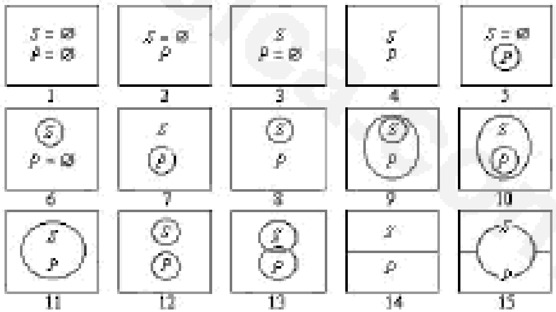


Таблица 1

Написание в таблице $S = \varnothing$ или $P = \varnothing$ означает, что объемы соответствующих терминов пусты. В модельных схемах 2, 4, 8 объем термина *P* совпадает с универсумом рассуждения, то же верно для термина *S* в модельных схемах 3, 4, 7. Очевидно, что данные 15 модельных схем исчерпывают все возможные случаи отношений между двумя терминами в непустом универсуме. Для случая же универсальной силлогистики, допускающей пустой универсум рассуждения, справедлива будет еще одна модельная схема:

$S = \varnothing$
$\neg S = \varnothing$
$P = \varnothing$
$\neg P = \varnothing$

на которой все термины и универсум в целом являются пустыми.

Среди бесконечного множества законов и форм корректных рассуждений в силлогистике выделяют некоторые наиболее фундаментальные их типы. Их обычно постулируют при аксиоматическом построении силлогистических систем.

Прежде всего, это умозаключения *простого категорического силлогизма*, которые, собственно, и называют *силлогизмами*. Каждый силлогизм представляет собой двухпосылочное умозаключение, в котором каждая из посылок и заключение представляют собой высказывания одного из четырех типов: ***a***, ***e***, ***i***, ***o***. В составе силлогизма содержатся три термина: субъект заключения называется *меньшим* термином (стандартно обозначается знаком *S*), предикат заключения – *бóльшим* термином (стандартно обозначается знаком *P*), а термин, входящий в обе посылки, – *средним* термином (обозначается знаком *M*). Посылка, содержащая бóльший термин, называется *бóльшей посылкой*, а содержащая меньший термин – *меньшей*. Все множество силлогизмов можно разбить на четыре класса в зависимости от расположения среднего термина. Типы силлогизмов с одинаковым расположением терминов в посылках называют фигурами силлогизма.

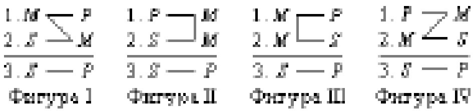


Рис. 1

Очевидно, что других конфигураций терминов в посылках нет. Каждый силлогизм, подпадающий под ту или иную фигуру, с определенными количественными и качественными характеристиками посылок и заключения называется модусом данной фигуры. Наименование

модуса содержит три гласных латинских буквы, первая из которых указывает тип бóльшей посылки, вторая – тип меньшей посылки, а третья – тип заключения. В каждой фигуре существует 64 модуса силлогизмов. Правильными, т.е. такими, в которых заключение логически следует из посылок, в традиционной логике считаются 24 силлогизма – по 6 модусов в каждой фигуре. Для правильных модусов в средневековой логике были придуманы названия:

I фигура	**II фигура**	**III фигура**	**IV фигура**
Barbara (**aaa**)	*Baroko* (**aoo**)	*Bokardo* (**oao**)	*Camenop* (**aeo**)
Celarent (**eae**)	*Cesare* (**eae**)	*Disamis* (**iai**)	*Dimaris* (**iai**)
Darii (**aii**)	*Camestres* (**aee**)	*Datisi* (**aii**)	*Camenes* (**aee**)
Ferio (**eio**)	*Festino* (**eio**)	*Ferison* (**eio**)	*Fresison* (**eio**)
Barbari (**aai**)	*Camestrop* (**aeo**)	*Darapti* (**aai**)	*Bramantip* (**aai**)
Celaront (**eao**)	*Cesaro* (**eao**)	*Felapton* (**eao**)	*Fesapo* (**eao**)

Таблица 2

В данном списке указаны не только *совершенные модусы* (модусы, заключение которых является наиболее сильным следствием из данных посылок в данной фигуре), но и *несовершенные*. Так, в I фигуре к числу несовершенных модусов относятся модусы *Barbari* и *Celaront*. Первый модус – это ослабленный модус *Barbara*, а второй – ослабленный модус *Celarent*. Во II фигуре несовершенными являются модусы *Camestrop* (ослабление *Camestres*) и *Cesaro* (ослабление *Cesare*). В III фигуре несовершенных модусов нет. В последней IV фигуре существует лишь один подобный модус. Это модус *Camenop* (ослабление *Camenes*). Иногда при перечислении правильных силлогизмов упоминаются только совершенные модусы, таковых оказывается 19.

Помимо двухпосылочных силлогизмов к числу базисных в силлогистике относят ряд однопосылочных (непосредственных) умозаключений. К ним в частности относятся *выводы по логическому квадрату*. Логический квадрат представляет собой следующую диаграмму:

Рис. 2

На ней зафиксированы отношения между категорическими высказываниями с одинаковыми субъектами и предикатами. В общем случае отношение *контрарности* (*противоположности*) между произвольными высказываниями **A** и **B** означает невозможность для них – в силу их логических форм – принять одновременно значение «истина», но возможность быть одновременно ложными; отношение *субконтрарности* (*подпротивоположности*) означает, что высказывания **A** и **B** не могут в силу своих логических форм быть одновременно ложными, но могут оказаться одновременно истинными; отношение *контрадикторности* (*противоречия*) означает, что логические формы высказываний не позволяют им быть как одновременно истинными, так и одновременно ложными; и наконец, отношение *подчинения* высказывания **B** высказыванию **A** означает, что при истинности **A** высказывание **B** обязательно истинно, но не наоборот (в этом случае **A** называют подчиняющим, а **B** подчиненным высказыванием).

Выделенные на логическом квадрате отношения обосновывают корректность ряда умозаключений:

– умозаключения, основанные на отношении контрарности высказываний видов SaP и SeP:

$$SaP \vdash \neg SeP, \qquad SeP \vdash \neg SaP;$$

– умозаключения, основанные на отношении субконтрарности высказываний видов SiP и SoP:

$$\neg SiP \vdash SoP, \qquad \neg SoP \vdash SiP;$$

– умозаключения, основанные на отношении контрадикторности высказываний видов SaP и SoP, а также SeP и SiP:

$$SaP \dashv\vdash \neg SoP, \qquad SeP \dashv\vdash \neg SiP,$$
$$SoP \dashv\vdash \neg SaP, \qquad SiP \dashv\vdash \neg SeP;$$

– умозаключения, основанные на отношении подчинения между SaP и SiP, а также SeP и SoP:

$$SaP \vdash SiP, \qquad SeP \vdash SoP,$$

где знак «$\vdash$» означает наличие выводимости второй формулы из первой, а знак «$\dashv\vdash$» наличие выводимости в обе стороны.

Часто в формальных системах силлогистики указанные дедуктивные принципы выражаются формулами, имеющими статус законов:

$\neg(SaP \ \& \ SeP)$ – закон контрарности;
$SiP \vee SoP$ – закон исключенного третьего;

$SaP \equiv \neg SoP$, $SeP \equiv \neg SiP$ – законы диагоналей;
$SaP \supset SiP$, $SeP \supset SoP$ – законы подчинения.

Другой разновидностью непосредственных умозаключений в силлогистике является операция *обращения* (*conversio*). Обращение – это однопосылочное силлогистическое умозаключение, в котором субъект заключения совпадает с предикатом посылки, а предикат заключения с субъектом посылки. Различают два вида обращения: *чистое обращение* – когда количественная характеристика высказывания в ходе умозаключения не меняется, и *обращение с ограничением* – когда количественная характеристика изменяется. Для высказываний типов ***e*** и ***i*** правильным традиционно считается чистое обращение:

$$SeP \vdash PeS, \qquad SiP \vdash PiS.$$

Для высказываний типа ***a*** правильным является только обращение с ограничением:

$$SaP \vdash PiS.$$

Высказывания типа ***o*** вообще корректно не обращаются.

В негативной силлогистике, где в сферу рассмотрения вводятся отрицательные термины, имеется еще один важный тип непосредственных умозаключений – операция *превращения* (*obversio*). Суть ее состоит в замене связки (утвердительной на отрицательную и наоборот) и замене предиката на противоречащий ему при переходе от посылки к заключению. Традиционно считают корректными следующие превращения:

$$SaP \dashv\vdash Se{\sim}P, \qquad SeP \dashv\vdash Sa{\sim}P,$$
$$SiP \dashv\vdash So{\sim}P, \qquad SoP \dashv\vdash Si{\sim}P.$$

В некоторых силлогистических теориях принимаются так называемые *законы силлогистического тождества*:

$$SaS, \qquad SiS.$$

В других силлогистиках эти формулы не имеют статуса законов. С семантической точки зрения в таких системах они обычно несут информацию о непустоте универсалии S. Зачастую в этих системах принимаются некоторые ослабления законов силлогистического тождества, содержащие утверждения о непустоте терминов в составе категорических высказываний определенных типов, например:

$$SaP \supset SaS, \qquad SiP \supset SiS, \qquad SoP \supset SiS.$$

§ 2. Исторический очерк

Массив работ, в которых затрагиваются проблемы в той или иной мере связанные с силлогистическими способами рассуждения, трудно обозрим. Поэтому можно установить только общую периодизацию этих исследований, указать наиболее характерные черты каждого из периодов и осуществить самый беглый обзор персоналий.

Аристотелем в начальных семи главах первой книги «Первой Аналитики» была подробно разработана чистая позитивная силлогистика. Кроме того, как будет показано ниже, им рассматривались и отдельные фрагменты негативной, сингулярной и расширенной силлогистик. Анализ ассерторической силлогистики, обогащение ее новыми идеями и концепциями начался сразу же после создания самой этой системы. Так, уже непосредственные ученики Аристотеля – Теофраст (371–288 гг. до н. э.) и Эвдем Родосский (акмэ ок. 320 г. до н. э.) – в отчетливой форме поставили вопрос о необходимости помещения среди модусов первой фигуры правильных силлогизмов, которые позднее были выделены в самостоятельную четвертую фигуру. Теофрасту принадлежит также заслуга более детальной разработки проблем, связанных с негативной силлогистикой. К сожалению, до нас дошло мало сведений о характере исследований, проводившихся в первые века существования школы перипатетиков, но общая направленность их исследований понятна. Добавления и поправки, которые вносились в ассерторическую силлогистику перипатетиками, придавали в целом логике Аристотеля тот характер, который приближал ее к так называемой школьной традиционной логике.

Следующий этап в исследовании силлогистики начинается с деятельности Андроника Родосского (I в. до н. э.), осуществившего издание сочинений Аристотеля. Уже это было важным событием, так как позволило приступить к детальному изучению и комментированию трудов Стагирита. Известно, например, что Андроник Родосский дал первый комментарий как к философским, так и логическим трактатам Аристотеля. Эта работа была продолжена Боэтом Сидонским, учеником Андроника, и многими другими. Вообще, весь период с I в. до н. э. и до того времени, когда в середине XII в. н. э. были сделаны переводы логических работ Аристотеля на латинский язык и западноевропейские мыслители смогли впервые познакомиться с этой частью наследия Стагирита, можно охарактеризовать как «период комментаторов». Такая характеристика не означает, что в данный период не появлялись оригинальные исследования по логике или что в более позднее время не комментировались труды Аристотеля. Характеризуя дан-

ный этап как «период комментаторов», мы хотели лишь подчеркнуть, что указанный способ научной работы был господствующим.

Одним из видных представителей многочисленной плеяды комментаторов был Александр Афродизийский (II–III вв. н. э.). Значение его исследований не случайно было особо подчеркнуто *Я. Лукасевичем*. Дело заключается в том, что Александр при написании комментариев опирался на достижения не только перипатетической школы, но и школ стоиков и мегариков. Это касается результатов, относящихся к сфере логики высказываний, которую он стремился согласовать со взглядами самого Аристотеля, внося, тем самым, в трактовку силлогистики элементы, чуждые создателю этой системы. Именно у Александра Афродизийского мы впервые находим упоминание о так называемом законе силлогистического тождества – «Все *S* есть *S*». Однако эти работы имели и иное значение – они приближали изложение материала по силлогистике к современному аксиоматическому стилю построения теорий – когда теория строится на базе логики высказываний.

Во II в. жили и два других исследователя Аристотеля – Апулей из Мадаура (род. ок. 125 г.) и Гален (род. ок. 131 г. – ум. ок. 200 г.). Первый разрабатывал вопросы, связанные с негативной силлогистикой, второму же приписывается выделение четвертой фигуры в самостоятельную фигуру. Филопону (IV в.) принадлежит введение круговых схем для изображения отношений между терминами категорических высказываний. Боэций (480–524 гг.) ввел в обиход ставшие теперь общепринятыми термины «*affirmo*», «*nego*», «бóльшая посылка», «меньшая посылка» и др.

Большое значение в изучении силлогистики играли комментарии логических работ Аристотеля арабоязычными философами – Аль-Фараби (870–950 гг.), Авиценной (род. ок. 980 г. – ум. в 1037 г.) и Аверроэсом (1126–1198 гг.). Комментарии последнего пользовались особой популярностью в средневековой Западной Европе. Наконец, отметим, что одним из крупнейших комментаторов логики Аристотеля был византийский ученый Михаил Псёлл (1018–1096 гг.). Ему принадлежит «Обзор логики Аристотеля», ставший известным в Западной Европе, видимо, уже в XIII в. под названием «Синопсис». В нем излагалось содержание логических сочинений Аристотеля.

Переломным в изучении философских и логических сочинений Аристотеля в определенной степени явился XII век. Развернувшиеся в рамках схоластического богословия бурные диспуты по ряду проблем теологии и философии вызвали потребность в более детальном обосновании используемых методов рассуждения. Это стало не последним стимулом, способствовавшим появлению в XII–XIII вв. переводов на латинский язык таких произведений Стагирита, как «Аналитика», «Топика», «О софистических опровержениях», а также «Метафизика».

В XIII в. аристотелизм как идейное течение явно оттеснил христианский догматизм платоновского толка. Этим, по-видимому, и объясняется тот факт, что период с середины XIII в. и вплоть до начала XVI в., т.е. до того времени, когда под натиском требований и запросов нарождавшихся новых общественных отношений схоластика постепенно сошла с исторической арены, был одним из самых плодотворных в исследовании логики Аристотеля.

В этот период на протяжении долгого времени особой популярностью пользовалось руководство по логике, написанное видным схоластом Петром Испанским (1210–1277 гг.) и называвшееся «Малая логическая сумма» (*Summulae logicales*). В этой работе, а также в работе его предшественника Уильяма Шервурда (ум. в 1249 г.) содержатся названия для правильных модусов силлогистики (*Barbara*, *Celarent* и др.) и даются специальные стихотворные формы, облегчающие их запоминание. Уильям Шервурд использовал в качестве мнемонического средства и так называемый «логический квадрат». Среди других исследователей этого периода, занимавшихся силлогистикой, следует отметить Альберта Саксонского (1316–1390 гг.), Уильяма Оккама (ум. ок. 1347 г.), Петра Мантуанского (XIV в.), Жана Буридана (1300–1358 гг.), Псевдо-Скота (анонимного автора XIV в.). Они в различных аспектах уточнили, детализировали и развили теорию силлогистического вывода. В это время в достаточно систематическом виде рассматривались отдельные вопросы, связанные с негативной и расширенной силлогистикой.

Однако, начиная с XV века, схоластика постепенно утрачивает свое значение. Новое время выдвигает на первый план задачу обоснования опытного знания. Для решения данной задачи даже самое скрупулезное изучение мировоззренческих концепций Аристотеля или Платона не могло дать требуемых результатов. Накопленный в схоластике огромный исследовательский материал в области логики и семантики оказался как бы излишним, а потому был безжалостно отброшен. На смену герменевтике пришли новые исследовательские приемы, связанные с экспериментальным познанием природы.

В развернувшейся идейной борьбе учение Аристотеля, приспособленное схоластами для решения религиозно-идеологических задач, объективно оказалось препятствием на пути научного прогресса. Си-

туация была такова, что всякое реформаторское движение, касалось ли оно чисто религиозных вопросов, или было связано с выработкой нового представления об устройстве мира, неизбежно сталкивалось с освященными традицией канонами Аристотеля. Все это отрицательно отразилось и на отношении к его логическим теориям. Именно в этот период в трудах наиболее значительных философов практически пропадают исследования по проблемам силлогистики.

Следующий этап в развитии логической мысли, длившийся от эпохи Возрождения до середины XIX в., характеризовался несколькими примечательными моментами, порой неожиданно и даже противоречиво сказавшимися на судьбе силлогистики. Прежде всего, следует отметить, что это был период логического «безвременья», поскольку старая логика, отождествленная со схоластикой, отрицалась, а новая еще не была развита. Собственно говоря, силлогистика по-прежнему входила в содержание учебников по логике. О ней, казалось бы, много рассуждали, но, как это ни странно, подобные рассуждения вовсе не были направлены на исследование собственно аристотелевского наследия. Более того, было утеряно и забыто адекватное представление о логике Аристотеля, а все, что о ней писалось, правильно было бы охарактеризовать как «миф о силлогизме». Именно в этот период происходит становление так называемой *традиционной силлогистики*, возникает представление о догматичности и завершенности силлогистики, а тем самым и всей формальной логики. Эта иллюзия была характерна в той или иной степени для многих философов от Ф. Бэкона до И. Канта. Силлогистике отводилась роль элементарной (школьной) теории рассуждений, применимой в практике научного познания в лучшем случае в простейших ситуациях, а то и только в «домашнем обиходе».

С другой стороны, в это же время в философии существовала и иная тенденция, которая состояла не в сохранении, закреплении и развитии уже имевшихся логических знаний, а в попытках выработать и систематизировать новую методологию научного познания, привлечь новые логические концепции и идеи. Этот поиск (что особенно существенно для нашей темы) привел, в конце концов, к созданию *символической логики*, появившейся в середине XIX века.

Исследование логических концепций, отличных от силлогистики, велось на протяжении всей истории логики. С этой точки зрения можно оценивать и работы стоико-мегарской школы, и авторов поздней античности, и многочисленные работы схоластов по теории логического вывода. Тем не менее, несмотря на высокий уровень логической образованности схоластов, им так и не удалось создать новую теорию дедукции, и это не было случайным фактом. Пожалуй, самым большим недостатком средневековой логики было почти полное забвение одного из основополагающих методов познания – метода построения формализованных систем. В этот период ярко проявляется разрыв между глубиной и детальностью семантического анализа целого ряда проблем и их слабым системно-синтаксическим оформлением. Первые наметки преодоления подобного разрыва обнаруживаются в «великом искусстве» Раймонда Луллия (1235–1315 гг.), но в наиболее четкой форме – у Г. Лейбница (1646–1716 гг.).

Начиная с Лейбница в научный обиход вводятся силлогистические теории, отличные от аристотелевской. Причина подобной ситуации достаточно прозрачна. Создатели новой логики всегда пытались сравнить строившиеся ими новые дедуктивные системы с чем-то уже хорошо известным. Отсюда попытки применить новые идеи и новый аппарат к анализу силлогистики, что зачастую автоматически приводило к появлению новых силлогистических теорий. Все это не могло не способствовать развитию общего учения о силлогизме.

Первая хорошо аргументированная система силлогистики, отличная от силлогистики Аристотеля, была предложена Г. Лейбницем. Основные идеи, заложенные в этой системе, в дальнейшем неоднократно повторялись различными исследователями. Укажем в этой связи на работы А. Де Моргана, который впервые осуществил систематическое исследование расширенной силлогистики, Ф. Брентано, Ч. Пирса, Дж. Венна, а позднее Б. Рассела, Д. Гильберта. Усилиями этих ученых была создана современная символическая логика, а потому характерные черты новых формализмов (исчисления высказываний и предикатов, булевой алгебры), трактовок общих и частных суждений пытались перенести и на аристотелевскую силлогистику.

Иная силлогистическая система была предложена Б. Больцано в рамках построенной им более богатой по выразительным возможностям дедуктивной теории. Интересная силлогистическая система, в которой реализовались специфические интуиции о смысле общих и частных высказываний, была создана Л. Кэрроллом, который разработал оригинальные семантический (диаграммный) и синтаксический методы проверки силлогистических рассуждений. Наконец, в связи с возникновением символической логики и разделением проблем старой и новой логики осуществляется окончательное оформление так называемой традиционной силлогистики. Происходят унификация и стан-

дартизация учебной литературы, а также канонизируется изложение учения о силлогизме. В XX в. работа по созданию новых силлогистических систем была продолжена с использованием богатого арсенала средств и методов символической логики.

Современное полноценное изучение логики Аристотеля началось с появлением прекрасного исследования Я. Лукасевича «Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики» [32]. Оценивая в самом общем виде эту работу, следует отметить, что именно Лукасевич явился первым логиком, владеющий математико-логическим аппаратом исследования, который серьезно отнесся к «Аналитикам», детально изучил сам трактат, а не его переложения. Проделанная Лукасевичем работа должна быть оценена в высшей степени положительно с учетом ее этапного характера. Она способствовала привлечению к этой тематике свежих логических сил и дала образец современного способа анализа силлогистических теорий. Лукасевич рассматривал силлогистику как особую, альтернативную логике предикатов, кванторную теорию. Такой взгляд на силлогистику стал немаловажным фактором, способствовавшим «реабилитации» этого старейшего раздела логики на современном этапе ее развития.

Первые шаги, предпринятые в этом направлении после Лукасевича, позволили по-новому поставить ряд проблем, связанных как с силлогистикой самого Аристотеля, так и с другими силлогистическими теориями. Большое значение здесь сыграли работы Дж. Коркорана [72], [73], который выступил с критикой позиции Я. Лукасевича. Существенна также роль работ Т. Смайли [85], [86], Е. Слупецкого [83], [84], Б. Ивануся [76], [77], П. Тома [89] и ряда других исследователей.

В это же время и в нашей стране наметилось явное повышение интереса к логическому наследию Аристотеля. В 1960 г. вышла в свет прекрасная книга, написанная А.С. Ахмановым [2]. Большой вклад в исследование силлогистических теорий внесли работы В.А. Смирнова, А.Л. Субботина, Е.К. Войшвилло, В.М. Попова, Л.И. Мчедлишвили, З.Н. Микеладзе, М.Н. Бежанишвили, Н.Г. Колесникова и др.

В заключение отметим, что создание в XIX в. исчисления предикатов, в рамках которого анализируются рассуждения не только с атрибутивными, но и со сложными высказываниями, а также с высказываниями об отношениях, привело к идее, что силлогистика для науки представляет лишь исторический интерес, так как является фрагментом исчисления предикатов. Однако демонстрация последнего утверждения была затруднена тем обстоятельством, что силлогистика и исчисление предикатов формулируются в разных языках, имеющих принципиально отличную категориальную структуру. Поэтому встала проблема адекватной интерпретации выражений силлогистики (и особенно силлогистики Аристотеля) в языке логики предикатов – проблема поиска такого перевода на этот язык категорических высказываний, при котором каждое силлогистическое утверждение является законом силлогистики тогда и только тогда, когда его перевод является законом логики предикатов.

Поиск адекватного перевода силлогистики в логику предикатов оказался нетривиальной задачей. Выяснилось, что существует множество интерпретаций категорических высказываний различной степени содержательной приемлемости, причем каждой такой интерпретации соответствует особая силлогистическая теория. Таким образом, в современной логике был отчетливо осознан тот факт, что силлогистика – это не одна логическая система, а совокупность теорий, различающихся не только выразительными возможностями языка, но и принимаемыми в них трактовками категорических высказываний и соответствующими данным трактовкам классами законов.

§ 3. Обзор основных силлогистических теорий

Силлогистика Аристотеля. Чистая позитивная ассерторическая силлогистика строится Аристотелем как дедуктивная теория. Ее исходными постулатами являются четыре *совершенных модуса* первой фигуры: *Barbara, Celarent, Darii* и *Ferio*. Кроме того, Аристотель принимает в качестве исходных принципов обращение высказываний ($SaP \vdash PiS$, $SiP \vdash PiS$, $SeP \vdash PeS$), а также выводимости, в основе которых лежат логические отношения между категорическими высказываниям с одинаковыми субъектами и предикатами (позже эти выводимости были названы *правилами логического квадрата*). Обоснование других силлогистических умозаключений Аристотель осуществлял тремя способами. Первый способ – *прямое обоснование* – состоит в непосредственном выведении заключения из посылок с использованием только исходных дедуктивных постулатов. Второй способ – *доказательство от противного* – состоит в принятии допущения, противоречащего заключению обосновываемого рассуждения, и выведения из этого предположения и посылок данного рассуждения (с использованием исходных дедуктивных принципов) противоречащих друг другу высказываний. Третий способ – *эктетическое доказательство* – состоит в следующем. Если на некотором шаге обоснования имеется частное высказывание SiP или SoP,

то вводятся дополнительные допущения, которые содержат ранее не встречавшийся термин M (называемый *эктезисом*) – MaS и MaP в первом случае, и MaS и MeP во втором случае, а исходная задача сводится к выведению обосновываемого заключения из данных допущений. Заметим, что в чистой позитивной силлогистике метод эктетического доказательства не является необходимым.

Класс силлогистических законов, который можно обосновать указанными способами, составляет чистую позитивную силлогистику Аристотеля. Им, однако, не были осуществлены доказательства многих законов, например, модусов четвертой фигуры. Долгое время дискутировался вопрос, принимал ли Стагирит законы силлогистического тождества «Все S есть S» (SaS) и «Некоторые S есть S» (SiS). Некоторые исследователи утвердительно отвечают на этот вопрос. Отмечается, что утверждение SaS можно обосновать комбинируя методы доказательства от противного и эктетического доказательства для SoP. Однако подобного обоснования в трудах самого Аристотеля не содержится, как не содержится и четкой формулировки эктетических правил. По нашему мнению, одним из условий допустимости правила эктезиса для частноотрицательного высказывания является требование наличия информации о непустоте термина S в составе SoP при введении допущений MaS и MeP. При принятии данного условия утверждение SaS оказывается недоказуемым. Более детальный анализ этого вопроса будет осуществлен в следующей главе.

Анализируя, правда отрывочно и несистематично, высказывания с сингулярными терминами, Аристотель отмечал, что такие термины могут быть лишь субъектами, но никак не предикатами высказываний. Иначе говоря, высказывания с сингулярными терминами не рассматриваются им как разновидность множественных, т.е. они представляют собой, согласно Аристотелю, особый тип категорических высказываний, не сводимый к общим или частным. Анализ аристотелевских текстов позволяет вычленить некоторые принимаемые им умозаключения с сингулярными терминами, например, вывод:

$$SaP,\ v \text{ есть } S \vdash v \text{ есть } P,$$

где v здесь и далее – метапеременная по сингулярным терминам.

Что касается выводов из категорических высказываний с отрицательными терминами, то, согласно Аристотелю, правильными являются только превращения утвердительных высказываний в отрицательные, т.е. правильными являются лишь следующие умозаключения данного типа:

v есть $P \vdash v$ не есть $\sim P$, $\quad$ v есть $\sim P \vdash v$ не есть P,

$SaP \vdash Se{\sim}P$, $\quad$ $Sa{\sim}P \vdash SeP$,

$SiP \vdash So{\sim}P$, $\quad$ $Si{\sim}P \vdash SoP$.

Достаточно естественной и, как будет показано в следующей главе, отвечающей аристотелевской трактовке категорических высказываний является их интерпретация, согласно которой утвердительные высказывания предполагают, а отрицательные не предполагают непустоту субъекта. Идея данной интерпретации силлогистики Аристотеля восходит к У. Оккаму, считавшему любое утвердительное высказывание с пустым субъектом ложным, а любое отрицательное высказывание такого типа истинным.

Оккамовская трактовка эксплицируется в языке логики предикатов посредством следующего перевода, рассмотренного В.А. Смирновым (см., например, [59]):

(I) $SaP \twoheadrightarrow \forall x(Sx \supset Px) \mathbin{\&} \exists x Sx$,
$SeP \twoheadrightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px)$,
$SiP \twoheadrightarrow \exists x(Sx \mathbin{\&} Px)$,
$SoP \twoheadrightarrow \exists x(Sx \mathbin{\&} \neg Px) \vee \neg\exists x Sx$,

где знак «$\twoheadrightarrow$» означает процедуру перевода с языка на язык.

Системой силлогистики, погружающейся в исчисление предикатов посредством перевода (I), распространенного стандартным образом на сложные формулы, является исчисление **С2**, предложенное В.А. Смирновым [59]. Аксиомами **С2**, помимо аксиом исчисления высказываний, являются формулы следующих видов:

A1. $(MaP \mathbin{\&} SaM) \supset SaP$ – *Barbara*,
A2. $(MeP \mathbin{\&} SaM) \supset SeP$ – *Celarent*,
A3. $SeP \supset PeS$ – закон *e*-обращения,
A4. $SaP \supset SiP$ – закон подчинения,
A5. $SiP \supset SaS$ – ослабление закона тождества,
A6. $SeP \equiv \neg SiP$ – закон диагоналей логического квадрата,
A7. $SoP \equiv \neg SaP$ – закон диагоналей логического квадрата.

Единственным правилом вывода является *modus ponens*. Смысл **A5** состоит в том, что субъект истинного высказывания типа *i* непуст, поскольку SaS при трактовке (I) несет информацию о непустоте S.

Теорема о погружаемости **С2** в исчисление предикатов была доказана различными способами В.А. Смирновым [61], М.Н. Бежанишвили и Л. И.Мчедлишвили [3] и В.И. Маркиным [34], [36].

Фундаментальная силлогистика. Исторически первая попытка перевода силлогистических утверждений на язык новой логики была предпринята Г. Лейбницем. Высказывания типа SaP он трактовал как утверждения о пустоте пересечения объемов S и не-P (что эквивалентно утверждению о включенности S в P), SiP – как утверждение о непустоте пересечения объемов S и P, SeP – как утверждение о пустоте пересечения S и P, SoP – как утверждение о непустоте пересечения S и не-P. Аналогичная трактовка категорических высказываний была отчетливо выражена Ф. Брентано. Данная интерпретация категорических высказываний может быть выражена в языке логики предикатов посредством следующего перевода:

(II) $SaP \twoheadrightarrow \forall x(Sx \supset Px)$,
$SeP \twoheadrightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px)$,
$SiP \twoheadrightarrow \exists x(Sx \mathbin{\&} Px)$,
$SoP \twoheadrightarrow \exists x(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$.

Предложенная Лейбницем трактовка категорических высказываний, которая была повторена в работах других исследователей, выражала фундаментальный взгляд новой логики на смыслы логических констант – «Всякий... есть (не есть)...» и «Некоторый... есть (не есть)...». Он состоит в том, что общие высказывания понимаются неэкзистенциально, т.е. истинны при пустых субъектах, а частные – экзистенциально, т.е. ложны при пустых субъектах.

При данном переводе категорических высказываний в рамках новой логики удается обосновать многие силлогистические законы: 15 аристотелевских модусов силлогизма, законы диагоналей логического квадрата, законы обращения для высказываний типов *i* и *e* и др. Кроме того, силлогистический закон тождества доказуем в форме SaS, но не доказуем в форме SiS. Однако многие силлогистические принципы при такой интерпретации становятся незаконными в новой логике. Таковыми являются модусы силлогизма с общими посылками и частным заключением, принципы подчинения, принцип обращения высказываний типа *a*, принцип контрарности для *a* и *e*, принцип субконтрарности для *i* и *o* и др.

Таким образом, предложенная Лейбницем интерпретация категорических высказываний не дала ему возможности показать, что вся аристотелевская силлогистика является фрагментом новой логики. Тем не менее, указанное обстоятельство дает нам полное право считать Лейбница создателем новой, альтернативной аристотелевской, теории выводов из категорических высказываний. Следуя терминологии А. Де Моргана, мы будем называть ее *фундаментальной силлогистикой* (см. [74]). Первая современная формальная реконструкция чистого позитивного фрагмента фундаментальной силлогистики была предложена Дж. Шефердсоном [82].

Изучение и реконструкция фундаментальной силлогистики представляет собой как исторический интерес, поскольку лейбницевская трактовка категорических высказываний была характерна для тех исследователей, усилиями которых создавалась современная символическая логика, так и теоретическую ценность, так как данная интерпретация, по мнению многих математиков, оправдана потребностями математических применений логики. Действительно, в познавательной практике часто встречаются ситуации, когда введение «пустых» объектов (нуля в арифметике, пустого множества в теории множеств и т.д.), а вместе с ними и пустых терминов, позволяет формулировать и доказывать некоторые научные положения в самой общей форме, без каких-либо оговорок. Для этих целей данная трактовка категорических высказываний оказывается очень удобной.

Традиционная силлогистика. В традиционной логике аристотелевская силлогистика была серьезно трансформирована: введена в рассмотрение четвертая фигура простого категорического силлогизма, проанализированы сложные и сокращенные силлогизмы, более систематически сформулированы сингулярная и негативная силлогистики. Вместе с тем некоторые принципы силлогистики Аристотеля претерпели существенные изменения. В позитивной силлогистике это выразилось в явном принятии законов силлогистического тождества. В сингулярной силлогистике допускалось использование единичных терминов на местах не только субъектов, но и предикатов, причем единичные высказывания рассматривались как разновидность общих, а не как самостоятельный тип категорических высказываний. В традиционной негативной силлогистике законы превращения принимались в иной, нежели у Аристотеля, редакции: разрешалось выводить не только отрицательные высказывания из утвердительных с противоположным предикатом, но и наоборот.

Современное аксиоматическое представление традиционной силлогистики, а именно, чистого позитивного ее варианта было осуществлено Я. Лукасевичем [32]. Последний сформулировал силлогистическую систему, которую совершенно неверно объявил адекватной реконструкцией силлогистики Аристотеля. Лукасевич попросту считал, что аристотелевская и традиционная версия силлогистики имеют одни и те же законы. В следующей главе будет показано, что это не так. В

число аксиом он включил аксиомы исчисления высказываний, а также специфические силлогистические аксиомы следующих видов:

1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$ – модус *Barbara*,
2. $(MaP \,\&\, MiS) \supset SiP$ – модус *Datisi*,
3. SaS – закон силлогистического тождества,
4. SiS – закон силлогистического тождества,
5. $SeP \equiv \neg SiP$ – закон диагоналей логического квадрата,
6. $SoP \equiv \neg SaP$ – закон диагоналей логического квадрата.

Правилом вывода является *modus ponens*. Понятия доказательства и теоремы обычные.

Лукасевич показал, что законы традиционной чистой позитивной силлогистики являются теоремами построенной им системы; а отвергаемые в традиционной логике силлогистические утверждения не доказуемы в системе. Семантика для традиционной силлогистики, или, иначе говоря, для системы Лукасевича, была предложена Г. Смитом [87], С. Яськовским [78] и С. Виеру [91]. В терминах исчисления предикатов семантика Виеру, например, следующим образом интерпретирует силлогистические формулы:

$$
\begin{aligned}
\text{(III)}\quad & SaP \to \forall x(Sx \equiv Px) \vee (\forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists x\neg Px),\\
& SiP \to \neg\forall x(Sx \equiv \neg Px) \,\&\, (\exists x(Sx \,\&\, Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists xPx),\\
& SeP \to \forall x(Sx \equiv \neg Px) \vee (\forall x(Sx \supset \neg Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists xPx),\\
& SoP \to \neg\forall x(Sx \equiv Px) \,\&\, (\exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px).
\end{aligned}
$$

В 1971 г. Виеру доказал теорему о погружаемости системы Лукасевича в исчисление предикатов посредством перевода (III): всякая формула языка системы Лукасевича доказуема в этой системе тогда и только тогда, когда ее перевод указанного типа доказуем в исчислении предикатов [92], [93]. Два иных перевода системы Лукасевича в исчисление предикатов были предложены В.А. Бочаровым [4], первый из них рассматривался также Б. Иванусем:

$$
\begin{aligned}
\text{(IV)}\quad & SaP \to \forall x(Sx \equiv Px) \vee (\forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx),\\
& SiP \to \forall x(Sx \equiv Px) \vee \exists x(Sx \,\&\, Px),\\
& SeP \to \neg\forall x(Sx \equiv Px) \,\&\, \forall x(Sx \supset \neg Px),\\
& SoP \to \neg\forall x(Sx \equiv Px) \,\&\, (\exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(V)}\quad & SaP \to \forall x(Sx \equiv Px) \vee (\forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists x\neg Px),\\
& SiP \to \forall x(Sx \equiv Px) \vee \exists x(Sx \,\&\, Px),\\
& SeP \to \neg\forall x(Sx \equiv Px) \,\&\, \forall x(Sx \supset \neg Px),\\
& SoP \to \neg\forall x(Sx \equiv Px) \,\&\, (\exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px).
\end{aligned}
$$

Эти две семантики для чистой позитивной традиционной силлогистики дают те же результаты, что и семантика Смита, Яськовского и Виеру. Но при наличии в силлогистическом языке отрицательных терминов они задают разные классы законов негативной силлогистики. Так, в отличие от семантики Смита, Яськовского и Виеру, при интерпретациях (IV) и (V) принципы превращения верны лишь в аристотелевском ключе, т.е. допустимы лишь переходы от утвердительных высказываний к отрицательным. Между собой же они отличаются тем, что в семантике (V) имеют место принципы контрапозиции:

$$\boldsymbol{SaP} \equiv \sim\!\boldsymbol{Pa}\!\sim\!\boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{SoP} \equiv \sim\!\boldsymbol{Po}\!\sim\!\boldsymbol{S}.$$

Данная особенность свидетельствует о различии негативных силлогистик, связанных с интерпретациями (IV) и (V).

Погружаемость силлогистики Лукасевича в исчисление предикатов посредством перевода (IV) была доказана различными способами В.А. Смирновым [61] и В.И. Маркиным [36].

Однако переводы Виеру и Бочарова выражают весьма неочевидный смысл категорических высказываний. Более прозрачной является интерпретация, предложенная Е. Слупецким и подробно исследованная М.Н. Бежанишвили и Л.И. Мчедлишвили [3]. В ее основе лежит перевод *, совпадающий со стандартной интерпретацией (II) для фундаментальной силлогистики, распространенной на сложные формулы. Посредством этого перевода определяется операция Θ. Пусть $S_1,..., S_n$ – все термины, содержащиеся в силлогистической формуле **A**. Тогда $\Theta(\mathbf{A}) = (\exists xS_1x \,\&\, ... \,\&\, \exists xS_nx) \supset \mathbf{A}^*$. Доказана теорема о погружаемости силлогистики Лукасевича в исчисление предикатов посредством операции Θ. Иначе говоря, любая формула языка чистой позитивной силлогистики оказывается законом традиционной силлогистики в том и только в том случае, когда принимается стандартная, «фундаментальная» интерпретация категорических высказываний и дополнительное условие непустоты всех терминов, входящих в ее состав.

Силлогистика Больцано. Иная интерпретация категорических высказываний была предложена другим предтечей современной логики – Б. Больцано [69]. Он видоизменил лейбницевскую трактовку, потребовав дополнительно, чтобы истинные категорические высказывания всех типов (не только частные, но и общие) содержали непустой субъект. В языке логики предикатов больцановская интерпретация может быть выражена следующим образом:

(VI) $\boldsymbol{SaP} \rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx,$
$\boldsymbol{SiP} \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, Px),$
$\boldsymbol{SeP} \rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px) \,\&\, \exists xSx,$
$\boldsymbol{SoP} \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, \neg Px).$

При данном переводе не все законы аристотелевской силлогистики оказываются теоремами исчисления предикатов. Больцано, по существу, создал оригинальную силлогистическую теорию, в которой не принимаются следующие типы умозаключений: (1) умозаключения от отрицания категорического высказывания к утверждению высказывания, находящегося в противоположном углу логического квадрата; (2) обращение высказываний типа ***e***; (3) модусы *Camenes* и *Camenop* IV фигуры. Эти умозаключения будут законными в больцановской силлогистике лишь при определенных ограничениях на непустоту терминов, входящих в их посылки. Умозаключения первого типа имеют место при условии непустоты субъекта посылки. Обращение общеотрицательного высказывания законно, если его предикат не пуст. Модусы *Camenes* и *Camenop* справедливы только в случае непустоты меньшего термина. Законы превращения в логике Больцано принимаются в той же редакции, как и в традиционной силлогистике.

Силлогистика Кэрролла. Отличная (от лейбницевской и больцановской) интерпретация категорических высказываний была предложена Л. Кэрроллом [30]. Высказывания типа ***i***, по его мнению, есть утверждения о том, что некоторый реально существующий предмет является одновременно элементом объема обоих терминов суждения. Отсюда следует, что каждый термин такого суждения, взятый в отдельности, реален (не пуст). Из высказывания типа ***e*** нельзя вывести никакого заключения относительно реальности каждого из терминов. Высказывание типа ***a*** предполагает непустоту субъекта, а потому его необходимо понимать как суждение, утверждающее реальность каждого из своих терминов. Кэрролл не рассматривает как особую форму высказывания типа ***o***, считая их равносильными высказываниям вида «Некоторый *S* суть не-*P*», следовательно, предполагается непустота субъекта в ***SoP***.

Кэрролловское понимание смыслов категорических высказываний выражается в языке логики предикатов следующим образом:

(VII) $\boldsymbol{SaP} \rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx,$
$\boldsymbol{SiP} \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, Px),$
$\boldsymbol{SeP} \rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px),$
$\boldsymbol{SoP} \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, \neg Px).$

При данной трактовке категорических высказываний вывод SoP из $\neg SaP$ (закон диагонали логического квадрата), а также вывод SoP из SeP (закон подчинения) возможны только в случае непустоты термина S. Законы силлогистического тождества в силлогистике Кэррола отвергаются, а принципы превращения для общих высказываний принимаются в аристотелевской формулировке.

Системы **C1**, **C3** *и их расширения*. В.А. Смирнов [59] сформулировал две системы чистой позитивной силлогистики, которые являются подсистемами силлогистики Лукасевича. Система **C1** получается из **C2** отбрасыванием схемы **A5**. Данная система дедуктивно эквивалентна исчислению, предложенному ранее Е. Слупецким [83]. Система **C3** получается из **C1** добавлением к ее аксиомам закона тождества для высказываний типа i:

A8. SiS.

Если добавить формулу **A8** к **C2**, то получится построенное В.А. Смирновым исчисление **C4**, которое дедуктивно эквивалентно силлогистике Лукасевича.

В.А. Смирновым были предложены переводы для **C1** и **C3** в исчисление предикатов. Перевод для **C1** таков:

(VIII) $SaP \rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists x\neg Px$,
$SiP \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, Px)$,
$SeP \rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px)$,
$SoP \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px$.

Перевод категорических высказываний для **C3** (аналогичные семантические соображения обсуждались в работах Дж. Милера [80] и А. Строусона [88]) таков:

(IX) $SaP \rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists x\neg Px$,
$SiP \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists xPx$,
$SeP \rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists xPx$,
$SoP \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px$.

Легко убедиться в том, что переводы (VIII) и (IX) любых теорем, соответственно, систем **C1** и **C3** доказуемы в исчислении предикатов. Однако данные операции не являются погружающими. На этот факт обратил внимание О.Ф. Серебрянников (см. [11]).

В связи с этим встали два вопроса: какая трактовка категорических высказываний адекватна системама **C1** и **C3** и какие исчисления

формализуют системы силлогистики, основанные на принятии таких интерпретаций категорических высказываний, которые соответствуют переводам (VIII) и (IX) В.А. Смирнова.

Исследуя первую проблему, Л.И. Мчедлишвили [49] показал, что не существует стандартных переводов силлогистических формул на первопорядковый язык, погружающих системы **C1** и **C3** в одноместное исчисление предикатов. Под стандартным имеется в виду перевод, который каждой элементарной силлогистической формуле SaP, SeP, SiP, SoP сопоставляет замкнутую формулу языка логики предикатов, не содержащую предикатных символов, отличных от одноместных предикаторных констант S и P. Вместе с тем М.Н. Бежанишвили и Л.И. Мчедлишвили [3] удалось сформулировать оригинальную семантику и нестандартный адекватный перевод силлогистик **C1** и **C3** в исчисление предикатов. Иная семантика для этих же исчислений, которую авторы назвали *диадической*, была предложена В.М. Поповым и И.И. Хорохориным [55]. Основная идея диадической семантики состоит в сопоставлении универсалиям языка силлогистики не множества, а упорядоченной пары множеств объектов (диады). Далее задаются понятия **C1**-модели и **C3**-модели, где выделяются различные классы диад и отношения между диадами, на них накладываются определенные ограничения. Диадическая семантика была построена этими же авторами [56] и для силлогистик **C2** и **C4**.

Вторая проблема, по существу, состоит в ответе на вопрос о возможности расширения систем **C1** и **C3** до систем $\mathbf{C1}^{+}$ и $\mathbf{C3}^{+}$, которые погружались бы в исчисление предикатов посредством переводов (VIII) и (IX) соответственно. Такие аксиоматические системы были сформулированы Л.И. Мчедлишвили [50] и В.И. Маркиным [36], [39].

В данном параграфе мы дали обзор лишь самых известных систем силлогистики, относящихся преимущественно к классу чистых позитивных силлогистик. В дальнейших главах монографии эти и многие другие силлогистические теории будут исследованы более подробно.

ГЛАВА II

СИЛЛОГИСТИКА АРИСТОТЕЛЯ

§ 1. Аристотелевское понимание силлогизма

Данная глава посвящена исследованию логических текстов Аристотеля с целью установления основных особенностей той системы логики, которая была им построена. Мы считаем этот вопрос важным, так как в среде логиков относительно силлогистики, построенной самим Аристотеля, широко бытуют превратные представления. Обстоятельства сложились таким образом, что с течением времени было почти полностью утрачено адекватное понимание этой логики, в силу чего вокруг нее образовалось множество мифов. К их числу можно отнести мнения о том, что силлогистика Аристотеля якобы не допускает употребления пустых терминов или что Аристотель запрещал использовать в силлогистических выводах сингулярные термины и др. Одним из авторитетнейших источников мифотворчества относительно силлогистики Аристотеля оказался Я. Лукасевич, первым осуществивший попытку современной реконструкции этой системы.

Мы остановимся на нескольких проблемах: на аристотелевском понимании «силлогизма», на его трактовке фигур силлогизма, на вопросе о том, какая интерпретация может быть соотнесена с аристотелевской силлогистикой, и на вопросе о принципах оперирования негативными, сингулярными и сложными терминами в его системе.

Проблема трактовки Аристотелем термина «силлогизм» обсуждалась многими исследователями. К сожалению, те места из работ Стагирита, в которых содержатся дефиниции этого понятия (см. [1, 24b 17-26, 100a 25-27, 164b 27-a2]), допускают различную интерпретацию, что и порождает разные мнения по данной проблеме. Наиболее широко в настоящее время распространена точка зрения Лукасевича, который, основываясь на том, что Аристотель формулирует силлогизмы в виде условных высказываний, предлагает понимать их как импликативные выражения языка-объекта типа

$$(p \,\&\, q) \supset r,$$

где p, q, r – категорические высказывания. Примером здесь может служить такой текст:

> «Если А сказывается обо всех Б, а Б – обо всех В, то А необходимо сказывается обо всех В» [1, 25b 37-39].

Лукасевич правильно полагает, что та силлогистическая необходимость (она выражается термином «необходимо»), которая появляется у Аристотеля в формулировке ассерторического силлогизма, должна означать, что указанная в силлогизме связь имеет место для любых терминов, т.е. правомерность силлогизма зависит от его формы, но не от материи (содержания). Поэтому, скажем, модус *Barbara* должен пониматься в смысле:

> «Для всяких А, Б, Г справедливо: если А присуще всем Б, а Б – всем Г, то А присуще всем Г».

В этом случае силлогизм, будучи импликативным выражением языка-объекта, может оцениваться с семантической точки зрения как истинное или ложное утверждение.

Однако развиваемая Лукасевичем концепция не является единственно возможной. Иную точку зрения на силлогизм можно обнаружить в учебниках по традиционной логике, где всегда было принято строго различать две характеристики, приписываемые языковым конструкциям, – истинность и правильность. При этом силлогизмы понимались как правильные или неправильные, а не как истинные или ложные. Иначе говоря, традиционная логика трактует силлогизмы как некоторые умозаключения, или более конкретно – как правила вывода вида:

p, q, *следовательно*, r.

Близкая к традиционной, но в то же время и отличающаяся в некоторых моментах, точка зрения была высказана Дж. Коркораном [73] и Т. Смайли [86]. Согласно ей, силлогизм представляет собой не правило вывода или импликацию, а сам вывод. В пользу этой позиции говорит следующее место из «Аналитик»:

> «О силлогизме следует говорить раньше, чем о доказательстве, потому что силлогизм есть нечто более общее: ведь доказательство есть некоторого рода силлогизм, но не всякий силлогизм – доказательство» [1, 71b 23-24] (см. также [1, 71b 28-31]).

Если теперь вспомнить идущее от Аристотеля традиционное учение о доказательстве, в котором последнее всегда трактовалось как частный случай вывода, то мы будем вынуждены отождествить силлогизм с выводом.

Наконец, высказывалось и мнение, что под термином «силлогизм» Аристотель понимал либо пару посылок, либо заключение, но никак не нечто такое, в чем заключение и посылки являются лишь частями.

Реальная сложность обсуждаемой проблемы состоит в том, что в текстах Стагирита можно найти подтверждение любой из перечисленных точек зрения. Так, когда Аристотель разделяет все силлогизмы на *совершенные* (в смысле: базовые, исходные) и *несовершенные* (производные), к первым относятся модусы *Barbara*, *Celarent*, *Ferio* и *Darii* I фигуры, а ко вторым – все остальные модусы), то это можно истолковать в том смысле, что под силлогизмом он понимает некоторый вывод, а не правило вывода или тем более импликацию. Это становится особенно ясным из его объяснения, почему силлогизмы II и III фигур являются несовершенными. Ведь к ним надо что-то прибавить помимо того, что содержится в посылках и терминах, а именно: их посылки надо либо обратить, либо переставить местами, либо применить сведение к невозможному, т.е. применить обычные процедуры вывода (см. [1, 28a 3-8, 29a 14-16, 30-32]). С другой стороны, когда Аристотель пишет, что один и тот же силлогизм допускает разные заключения (см. [1, 53a 3-14]), то здесь имеется только одно истолкование – под силлогизмом в данном случае понимается пара посылок. Когда же он утверждает наличие для крайних терминов совершенного силлогизма, то это можно трактовать в том смысле, что силлогизм есть заключение, или точнее, то отношение между крайними терминами, которое фиксируется в заключении (см. [1, 25b 34-35]).

Рассматривая данные истолкования термина «силлогизм», П. Том [89] отмечает, что все они взаимосвязаны и взаимопредполагают друг друга. Например, посылки имплицируют заключение тогда и только тогда, когда заключение выводимо из них. Это позволяет ему придти к выводу о несущественности тех различий в трактовке силлогизма, которые были выявлены выше, и о возможности свободного перехода от одного истолкования к другому. Такой взгляд достаточно приемлем для целей современной реконструкции силлогистических умозаключений, однако он не отвечает на вопрос, какова же была позиция самого Аристотеля.

Для прояснения этого вопроса существенными являются не утверждения, которые делал по данному поводу Аристотель, а те специфические черты, которые присущи самой дедуктивной системе, построенной им. Анализ рассматриваемой проблемы под данным углом зрения позволяет, на наш взгляд, придти к однозначному заключению о том, что для Аристотеля силлогизм являлся, прежде всего, *метаязыковым утверждением о выводимости*.

В самом деле, если бы силлогизм представлял собой импликативное высказывание языка-объекта, то это существенно повлияло бы на применяемые Аристотелем процедуры сведения модусов II и III фигур к модусам I фигуры. Потребовалось бы использование законов и правил логики высказываний, оперирование логическими связками (¬, & и ⊃), т.е. пришлось бы применять такие средства вывода, которые использовались Я. Лукасевичем при реконструкции силлогистики на базе исчисления высказываний, но которые отсутствовали у самого Аристотеля.

Выдвигаемая концепция позволяет примирить отмеченные выше различия в употреблении обсуждаемого термина в «Аналитиках». Теперь, например, становится понятным, почему Аристотель формулирует силлогизмы в виде условных выражений. Становится оправданной и возможность их семантической проверки на истинность и ложность – ведь они представляют собой именно утверждения, хотя и выраженные в метаязыке. С другой стороны, некоторые из этих метаутверждений рассматриваются им как самоочевидные, т.е. принимаемые без доказательства, и специальным образом не анализируются. Таковыми являются совершенные силлогизмы, которые в теории дедукции выполняют роль элементарных выводимостей, или, говоря иначе, используются в качестве исходных правил вывода. Все остальные метаутверждения о выводимостях требуют своего обоснования теоретико-дедуктивными средствами, что и достигается с помощью соответствующих выводов.

Итак, если допустить, что Аристотель трактовал силлогизм как метаутверждение о выводимости вида:

$$p, q \vdash r,$$

где p, q, r – категорические высказывания, то он действительно мог обойтись без специального дедуктивного аппарата оперирования пропозициональными связками, каковым как раз и является логика высказываний. Для построения выводов в силлогистике ему достаточно было иметь некоторые правила переходов от одних метаутверждений о выводимости к другим метаутверждениям такого рода, т.е. такие правила, которые фиксируют свойства самой выводимости.

В современной логике исследуются различные концепции выводимости. Наиболее разработана классическая концепция выводимости. Согласно ей, выводимость удовлетворяет следующим свойствам:

1. Рефлексивность (**R**): $p \vdash p$.

2. Перестановка (**П**): $\dfrac{\Gamma, p, q, \Delta \vdash r}{\Gamma, q, p, \Delta \vdash r}$,

3. Сокращение (**С**): $\dfrac{\Gamma, p, p, \Delta \vdash r}{\Gamma, p, \Delta \vdash r}$,

4. Утончение (**У**): $\dfrac{\Gamma \vdash r}{p, \Gamma \vdash r}$,

5. Сечение (**Сеч**): $\dfrac{\Gamma \vdash p;\; p, \Delta \vdash r}{\Gamma, \Delta \vdash r}$.

В этих правилах Γ и Δ – последовательности высказываний (возможно пустые), p, q, r – какие-то высказывания, а черта означает метаязыковое «если ..., то ...».

При исторической реконструкции силлогистики Аристотеля, естественно, встает вопрос, характерно ли подобное понимание выводимости для самого Аристотеля, и если да, то в каком виде он использует перечисленные свойства данного отношения?

Рефлексивность (**R**). Данное свойство выводимости несомненно согласуется с аристотелевской логикой, так как частные случаи рефлексивности $SeP \vdash SeP$ и $SiP \vdash SiP$ легко получаются из обращений высказываний типов i и e по правилу (**Сеч**). Например,

$$\frac{SeP \vdash PeS;\; PeS \vdash SeP}{SeP \vdash SeP.}$$

Правило перестановки (**П**). В формулировке своих фигур Аристотель стандартизирует порядок посылок в двухпосылочных тезисах. На первое место ставится обычно посылка с бóльшим крайним термином, а на второе – с меньшим. Тем не менее, он иногда формулирует тезисы с другим порядком посылок. Например, модусы III фигуры *Felapton*, *Disamis*, *Datisi* и *Bokardo* формулируются с обратным порядком посылок, когда на первое место ставится высказывание с меньшим термином. Это, как будет далее показано, играет большую роль в аристотелевской трактовке фигур силлогизма, и указывает на наличие у него правила перестановки. Данное правило, кроме того, используется им в явной форме при сведении модусов II и III фигур к модусам I фигуры.

Правило сокращения (**С**). П. Том показывает, что данный принцип тривиально выполняется в той силлогистике, которая им строится как выражающая точку зрения Аристотеля (см. [89, с. 194]). Поэтому мы принимаем принцип сокращения как аристотелевский

принцип. В пользу этого говорит и тот факт, что Аристотель при обосновании модусов II и III фигур никогда не выписывает несколько раз одну и ту же посылку. Тем самым, предполагается, что выписанная один раз посылка может несколько раз участвовать в построении вывода. А это и есть неявное употребление принципа сокращения.

Правило утончения (**У**). Анализ текстов Аристотеля, хотя и косвенно, говорит о приемлемости для него данного принципа. Это следует из того места «Топики», где ведется рассуждение о необходимых и ненеобходимых посылках в аргументации (прагматическом рассуждении). При этом посылки разделяются на несколько видов – те, которые берутся, чтобы придать больший вес доводу; а также, чтобы скрыть заключение или сделать более четким довод. И далее читаем:

> «А [посылки], которые берут, чтобы скрыть выводы, нужны лишь ради спора. Но так как все это дело обращено против другого лица, то следует пользоваться и ими» [1, 155b 17-28].

Совет Аристотеля пользоваться ненеобходимыми посылками, пожалуй, следовало бы расценить как недоброкачественную рекомендацию софистического толка, если бы он полагал, что правило утончения не отвечает требованию научной строгости. Однако подозревать греческого философа в софистических уловках у нас нет никаких оснований. Кроме того, по его мнению, ненеобходимые посылки могут вводиться и по другим основаниям. Таким образом, можно обоснованно утверждать, что Аристотель знаком с принципом утончения и рассматривает его как приемлемый. Отметим также, что из приведенной цитаты следует, что Аристотель знаком с понятием существенной (необходимой) посылки, а потому становится интересной попытка рассмотреть его силлогистику как релевантную систему.

Правило сечения (**Сеч**). Примеры применения этого правила можно обнаружить у Аристотеля в каждой процедуре сведения модусов II и III фигур к модусам I фигуры. С другой стороны, так как Аристотель знаком со сложными силлогизмами, в частности с *соритами*, это правило должно использоваться и здесь. В «Аналитиках» можно найти также места, где Аристотель в явной форме использует свойство транзитивности выводимости (см. [1, 42a 1-4, 57b 6-9, 72b 37-a5]).

Кроме рассмотренных правил, в которых выражаются основные свойства выводимости, Аристотель использует еще два специальных правила. Одним из них является правило терминной подстановки, т.е. подстановки одних терминов вместо других.

Правило терминной подстановки (**U**). В своем систематическом обзоре модусов I, II и III фигур Аристотель предпочитает формулировать силлогизмы в разных фигурах с использованием различных переменных. Так, модусы I фигуры формулируются с переменными АВГ (бóльший, средний и меньший термины, соответственно). Модусы II фигуры – с переменными MNΞ (средний, бóльший, меньший термины), а III фигуры – с переменными ΠΡΣ (бóльший, меньший, средний термины). Но здесь же он редуцирует модусы II и III фигур к модусам I фигуры, в результате чего модусы I фигуры оказываются сформулированными уже не в терминах АВГ, а соответственно в терминах NMΞ и ΠΣΡ. Далее в разных местах «Аналитик» Аристотель порой формулирует один и тот же модус с использованием различных переменных. Например, модус *Celarent* дается им в терминах АВГ, NMΞ, ΞMN, AΔB, ABΔ и АГВ (см. [1, 25b 40-a2, 27a 7-8, 27a 11-12, 61b 3-4, 79b 2-4, 80a 13]). Все это указывает на широкое использование Аристотелем принципа подстановки:

$$\mathbf{B} = \cup^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \mathbf{A} \mid \ (\mathbf{U}),$$

где **B** есть тезис, получающийся в результате одновременной подстановки в тезис **A** вместо каждого вхождения терминов $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, соответственно, произвольных терминов $\beta_1,\ldots,\beta_n$.

Правило пропозиционального отрицания (**K**). Как уже отмечалось, Аристотель строит свою силлогистику без опоры на логику высказываний, поэтому, казалось бы, нет необходимости вводить какие-то специальные правила для оперирования логическими связками. Однако здесь делается одно исключение. В косвенных доказательствах от противного, которые Аристотель применяет при сведении одних модусов к другим, в качестве дополнительной посылки принимается высказывание, которое противоречит заключению данного модуса, т.е. является его отрицанием. Это делает естественным принятие специального правила пропозиционального отрицания, что лишь способствует более детальному прояснению стиля рассуждений Аристотеля, нисколько не меняя их по существу:

$$\frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma, \neg q \vdash \neg p} \ (\mathbf{K})$$

Чтобы завершить построение позитивной силлогистики Аристотеля, необходимо кроме общих свойств выводимости задать еще специальные выводимости, выражающие специфические свойства самих

категорических высказываний. К ним относятся из числа двухпосылочных тезисов сильные модусы I фигуры: *Barbara*, *Celarent*, *Darii* и *Ferio*. Однако эти тезисы не являются независимыми друг от друга. Сам Аристотель указывает, что модусы I, II и III фигур могут быть сведены лишь к общим силлогизмам I фигуры, т.е. к модусам *Barbara* и *Celarent* (см. [1, 29b 1]). Что касается однопосылочных тезисов, то здесь можно ограничиться принципами *e*-обращения и подчинением для высказываний типа *a*.

Итак, система Аристотеля формулируется следующим образом. Исходными выводимостями являются выводимости:

$$\frac{MaP,\ SaM}{SaP}, \qquad \frac{MeP,\ SaM}{SeP},$$

$$\frac{SeP}{PeS}, \qquad \frac{SaP}{SiP}, \qquad \frac{SiP}{SaS}.$$

Подробное обоснование правомерности принятия в силлогистке Аристотеля последней выводимости дается в § 3 данной главы. В качестве правил вывода используются правила **R**, **П**, **С**, **У**, **Сеч**, **U** и **K**.

§ 2. Фигуры и модусы

Аристотель выделяет три фигуры: I фигуру, в которой средний термин в одной из посылок является предикатом, а в другой – субъектом; II фигуру, в которой средний термин в обеих посылках является предикатом; III фигуру, в которой средний термин в обеих посылках является субъектом.

Такая позиция, занятая Аристотелем, породила обширную литературу, в которой обсуждаются две основные проблемы: 1) почему Стагирит разбивает множество всех двухпосылочных тезисов на три, а не на четыре подкласса и 2) подпадает ли каждый из правильных двухпосылочных модусов под одну из аристотелевских фигур, или же Аристотель ошибался, и имеются такие силлогистические модусы, которые не попадают ни в один из выделенных им классов разбиения.

Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо ближе познакомиться с традиционным учением о четырех фигурах. Если взять в качестве примера модус *Barbara* I фигуры и переставить местами посылки, то получим силлогизм:

1. S	—	M	*a*	Всякий S есть M
2. M	∠	P	*a*	Всякий M есть P
3. S	—	P	*a*	Всякий S есть P.

Это правильный силлогизм, так как он получен из модуса *Barbara* простой перестановкой посылок. Но к модусам какой из традиционных фигур мы должны его отнести? Согласно обычным определениям, фигуры различаются положением среднего термина. Тогда данный силлогизм должен быть отнесен к IV фигуре, но среди модусов этой фигуры нет правильного модуса ***aaa***. С другой стороны, нельзя его отнести и к I фигуре, поскольку средний термин расположен в нем иначе. Таким образом, мы обнаружили некоторый конкретный силлогизм, который, согласно обычному пониманию фигур, ни под одну из них не подпадает и оказывается тем самым неучтенным.

Это затруднение разрешается достаточно просто, так как фактически фигура определяется не только положением среднего термина в посылках, но и неявно принимаемым условием о положении крайних терминов (бóльшая посылка всегда ставится на первое место, а меньшая – на второе, причем в заключении бóльший термин стоит на месте предиката). То же самое можно выразить и несколько иначе: понятие модуса рассматривается с точностью до перестановки посылок, т.е. модусы с различным порядком посылок «склеиваются» в один и становятся неотличимыми друг от друга. Отсюда вытекает, что рассматриваемый в примере модус оказывается излишним, ибо, определив, что является субъектом и предикатом заключения, мы должны переставить в требуемом порядке посылки и получить модус *Barbara* I фигуры. Конечно, при этом некоторые правильные двухпосылочные тезисы оказываются скрытыми за другими, и тем самым как бы неучтенными. Так, рассматриваемый модус ***aaa*** и модус *Barbara*, конечно же, отличаются друг от друга, хотя и могут оказаться эквивалентными, если в дедуктивной теории допускается правило перестановки посылок.

Чтобы учесть данное обстоятельство, можно поступить двояко: либо ввести еще четыре дополнительные фигуры, в которых в заключении термины переставлены местами, т.е. бóльший термин стоит на месте субъекта, а меньший – на месте предиката, либо сохранить число фигур без изменения, но принять позицию, которую вслед за Аристотелем принимали и схоласты, – считать, что в каждой фигуре с фиксированным порядком посылок имеются как *прямые*, так *непрямые* заключения. В этом случае к числу силлогизмов с прямым заключением будут относиться все правильные модусы традиционной логики, силлогизмы же, в которых термины в заключении переставлены местами, будут относиться к непрямым модусам.

Существенное отличие аристотелевских фигур от традиционных состоит также в том, что он всегда располагал высказывания, участвующие в силлогизме, линейно, а не столбиком, как это делается в традиционной логике.

Вот как он описывает I фигуру:

> «Итак, если три термина так относятся между собой, что последний термин целиком содержится в среднем, а средний целиком содержится в первом или вовсе не содержится в нем, то для этих крайних терминов необходимо имеется совершенный силлогизм. Средним термином я называю тот, который сам содержится в одном, в то время как в нем самом содержится другой, и который по положению оказывается средним. Крайними же я называю и тот, который содержится в другом, и тот, в котором содержится другой» [1, 25b 36].

Например, модус *Barbara* в линейной записи выглядит так: «Если А присуще всякому Б, а Б присуще всякому В, то А присуще всякому В». Рассматривая расположение терминов в этом модусе, нельзя не видеть, что средний термин действительно, как об этом и говорит Аристотель, «по положению оказывается средним», а крайние также являются крайними по положению. Иначе говоря, Аристотель имеет в виду упорядоченную тройку терминов <А, Б, В>.

Переходя к анализу модусов II фигуры, он пишет:

> «Средним термином в этой фигуре я называю тот, который сказывается об обоих крайних, крайними же терминами – те, о которых высказывается средний: бóльшим крайним – тот, который находится ближе к среднему, меньшим крайним – тот, который находится дальше от среднего. Средний же термин стоит вне крайних и по положению – первый» [1, 26b 34–27a].

Если теперь обратиться к записи силлогизмов по этой фигуре, например «Если М не присуще ни одному Н, но присуще некоторым О, то Н необходимо не присуще некоторым О», то и здесь термины в посылках представляют собой упорядоченную тройку <М, Н, О>, где М – средний термин, стоящий вне крайних и по положению первый, а Н – бóльший термин, который стоит ближе к среднему.

С аналогичным явлением мы встречаемся и при описании III фигуры, которая задается упорядоченной тройкой «П, Р, С», где П – бóльший термин, Р – меньший, а С – средний (см. [1, 28а 12-16]).

Исходя из аристотелевских определений фигур, если мы учтем, что I фигура – это фигура, в которой средний термин в одной из посылок является предикатом, а в другой – субъектом и стоит в середине упорядоченной тройки, то фигуры, следуя Аристотелю, можно задать следующими тройками терминов:

I фигура –	<м, с, б>, <б, с, м>,
II фигура –	«с, б, м »,
III фигура –	«б, м, с »,

где «б» – бóльший, «с» – средний, а «м» – меньший термины. Характер определения первой фигуры показывает, что в ней допустимы перестановки посылок. Отметим, что такого рода диаграммы встречаются у античных и средневековых комментаторов Стагирита.

Теперь возможно и для аристотелевских трех фигур определить, что значит быть прямым и непрямым заключением. Заключение в аристотелевских фигурах является прямым, когда субъект этого заключения является субъектом в одной из посылок или когда его предикат является предикатом в некоторой посылке. Заключение является непрямым, если указанные условия не выполняются. Это определение не зависит от порядка посылок, а учитывает только роли, которые играют крайние термины в посылках. Согласно этому определению, в аристотелевской первой фигуре содержатся как прямые, так и непрямые силлогизмы, а во второй и третьей фигурах – только прямые модусы.

Из этого можно сделать вывод: в рамках трех аристотелевских фигур могут быть выделены все известные из традиционой логики 24 правильных модуса. Для второй и третьей фигур это будут обычные традиционые модусы, что же касается аристотелевской первой фигуры, то здесь будут находиться как традиционые 6 модусов (при прямом заключении), так и 6 модусов с непрямыми заключениями, которые как раз и являются модусами IV фигуры. Это модусы *Baralipton*, *Celantes*, *Dabitis*, *Fapesmo*, *Frisesomorum* и *Celantop*. Они, соответственно, совпадают с прямыми модусами IV фигуры при ее обычном принятом в традиционой логике представлении, но с переставлеными посылками: *Bramantip*, *Camenes*, *Dimaris*, *Fesapo*, *Fresison* и *Camenop*. Кроме того, среди прямых модусов II и III аристотелевских фигур (согласно принятому нами определению для этих фигур прямых

модусов) будут находиться и такие модусы, которые в их традиционном представлении должны быть отнесены к непрямым модусам, т.е. к модусам с переставлеными в заключении терминами. Например, во II фигуре наряду с модусом *Baroko* будет и модус *Bormako*, а в III фигуре наряду с модусом *Bokardo* будет и модус *Bamorko*. Итак, точка зрения Аристотеля по вопросу о фигурах силлогизма не менее последовательна и правомерна, чем традиционая позиция.

§ 3. Интерпретация

Содержание данного параграфа чрезвычайно существенно для уяснения смысла аристотелевской дедуктивной системы. Опираясь на тексты самого Стагирита, мы попытаемся обосновать ту точку зрения (см. [6]), что его силлогистика предполагает семантические условия истинности для категорических высказываний, которые в классической логике предикатов можно выразить следующим образом:

$$SaP \rightarrow \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx,$$
$$SiP \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, Px),$$
$$SeP \rightarrow \forall x(Sx \supset \neg Px),$$
$$SoP \rightarrow \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx.$$

В данных переводах содержится следующие характеристики категорических высказываний: требование непустоты субъекта накладывается только на утвердительные (общие и частные) высказывания и не накладывается на отрицательные. Кроме того, слово «некоторые», содержащееся в частных высказываниях, имеет экзистенциальный смысл только тогда, когда оно используется в высказываниях типа *i*, и не имеет экзистенциального смысла в высказываниях типа *o*. Какие же имеются у нас основания приписать такую семантику Аристотелю?

К сожалению, Аристотель не оставил в явном и четком виде никаких семантических построений, по которым можно было бы прямо и непосредственно однозначно судить о принимаемых им условиях истинности категорических высказываний. Поэтому мы вынуждены восстанавливать ту интерпретацию, которая имплицитно им предполагалась, по отдельным разбросанным в разных местах замечаниям и полунамекам. Тем не менее, мы считаем, что при суммировании всего материала возникает достаточно стройная и внутренне согласованная семантическая концепция, которая с высокой степенью достоверности может быть атрибутирована Стагириту.

1) В «Метафизике» Аристотель с явно выраженным одобрением приводит мнение элеатов, согласно которому «бытие есть, а небытия – нет» (см. [1, 986b 28-31]). Здесь его привлекает не онтологическая концепция элеатов, противником которой он был, а логический смысл, присущий этому тезису. С логической точки зрения он может быть понят так: позитивная предикация, выражаемая связкой «есть», всегда должна относиться к бытию (сущему), в то время как относительно небытия (не-сущего) должна быть верна негативная предикация, выражаемая связкой «не есть».

Эта позиция непосредственно вытекает из аристотелевской концепции истины как соответствия наших утверждений объективной реальности. С этой точки зрения, если мы истинно предицируем некоторое свойство объекту, т.е. истинным является высказывание «*v* есть *P*», а истинность есть соответствие реальности, то этот объект *v* с указанным свойством должен существовать, т.е. должно быть истинным высказывание «*v* существует». Иначе говоря, имеет место следование:

$$v \text{ есть } P \vdash v \text{ существует.}$$

Отсюда по контрапозиции следует, что если объект не существует, то он не обладает никакими свойствами, а потому и любая предикация ему некоторого свойства должна оцениваться как ложная:

$$\neg\, v \text{ существует} \vdash \neg\, v \text{ есть } P.$$

Но тогда истинным будет высказывание, в котором такая предикация отрицается, т.е. «*v* не есть *P*».

Подобные соображения должны были с необходимостью приводить Аристотеля к мысли, что в категорических высказываниях связки «есть» и «не есть» не являются чисто формальными показателями наличия акта предикации, но и выражают определенную онтологическую информацию. Так, если высказывания «Всякий *S* есть *P*» или «Некоторый *S* есть *P*» истинны, то связка «есть» должна нести информацию о непустоте субъекта, т.е. из этих высказываний должно следовать «*S* есть». Именно это и имеет место в предполагаемой интерпретации.

2) В работе «Об истолковании» Аристотель по синтаксической структуре различает простые («человек», «Сократ») и составные (сложные) имена («красивая лошадь», «судно морских разбойников») [1, 16а 22-27]. Кроме того, Аристотель классифицирует имена и по их референциальному статусу: общие («человек») и единичные («Со-

крат»). Однако он знаком с именами еще одного типа, а именно с теми, что мы сейчас назвали бы пустыми именами. Пример такого термина – это «козлоолень», который хотя и обладает смыслом, но не имеет референта в реальности.

Таким образом, Аристотелю были известны все семантические типы имен, которые принято выделять в современной логике – пустые, единичные и общие. Но его классификация содержит еще один тип имен, а именно, неопределенные имена. Последние занимают промежуточное положение между подлинными именами, обозначающими нечто сущее, и пустыми именами. К ним он относит термины, которые начинаются с отрицательной частицы «не-» (например, «не-человек»), описывая эту категорию так:

> «"Не-человек" не есть имя; нет такого имени, которым можно было бы его назвать, ибо он не есть ни речь, ни отрицание. Пусть оно называется неопределенным именем, <потому что оно одинаково подходит к чему угодно – к существующему и несуществующему>» [1, 16*a* 30–34].

Здесь интересно обоснование, в силу которого эти имена надо считать неопределенными. Действительно, что такое «не-человек»? Все, что не является человеком, например «лошадь» (существующий объект) и «козлоолень» (несуществующий объект) могут с одинаковым правом называться этим термином. Таким образом, экзистенциальная характеристика этого термина действительно является неопределенной.

Следующим важным элементом высказывающей речи является глагол. Как и в случае с именами, Аристотель различает подлинные глаголы и, так сказать, неподлинные (неопределенные). Например, выражение «не здоров» не относится к подлинным глаголам, ибо хотя оно (далее идет цитата из Аристотеля)

> «обозначает еще и время и всегда присуще чему-либо, но для этого различия нет названия; назовем его неопределенным глаголом, потому что оно одинаково подходит к чему угодно – к существующему и несуществующему» [1, 16b 13-15].

Уже из этих трактовок отрицательных терминов и отрицательных глаголов можно сделать далеко идущие выводы об универсуме рассуждения, который предполагается Стагиритом в его логике. Здесь содержится явный намек, что универсум шире, чем область сущего, а это прямо противоречит обычной точке зрения на силлогистику Аристотеля как, якобы, предполагающую непустоту терминов.

Аристотелевская трактовка неопределенных глаголов хорошо согласуется с той интерпретацией категорических высказываний, которую мы пытаемся ему атрибутировать. Действительно, отрицательная предикация, по Стагириту, истинно осуществляется как относительно существующего, так и несуществующего, а это должно означать, видимо, следующее: высказывания вида «Всякий *S* не есть *P*» истинны, когда пересечение *S* и *P* пусто, включая случай когда сам субъект *S* пуст, а высказывания «Некоторый *S* не есть *P*» истинны и тогда, когда пересечения *S* и не-*P* не пусто, и когда субъект *S* пуст.

3) Известно, что Аристотель в различных местах своих трактатов использует разные языковые формулировки основных типов категорических высказываний. Наиболее часто употребимыми и стандартизированными видами таких языковых представлений следует признать следующие записи:

P присуще всем *S*,
P не присуще ни одному *S*,
P присуще некоторым *S*,
P не присуще некоторым *S*,

т.е. записи с постановкой в предложениях на первое место предиката, а на второе – субъекта (см. [1, 24a 17-19]). В то же время он достаточно свободно варьирует эти формы, употребляя и иные способы выражения (см. [1, 24b 26-28, 26a 2, 26b 6, 44a 14, 49b 22-25, 56a 20] и в других местах).

В трактате «Об истолковании» (см. [1, 17b 18-20]) всем этим формам им предпочитаются следующие:

Каждый человек бледен,
Ни один человек не бледен,
Есть некий бледный человек,
Не каждый человек бледен.

Здесь стоит обратить внимание на различие в способах выражения частноутвердительного и частноотрицательного высказываний. Аристотель записывает частноутвердительное высказывание «Некоторый человек бледен» в форме «Есть некий бледный человек», придавая тем самым этим высказываниям явно выраженный экзистенцальный смысл. В то же время аналог такой формы никогда не применяется им для записи частноотрицательных высказываний, что можно понимать в том смысле, что он не придавал им экзистенциального смысла. Напротив, Аристотель постоянно подчеркивает, что форма «*P* не присуще некоторому *S*» означает то же самое, что и «*P* присуще не всякому *S*», т.е. «Неверно, что каждому *S* присуще *P*». Более того, как бы опасаясь, что его неправильно поймут, он постоянно предпочитает вторую форму выражения, говоря тем самым, что частноотрицательное высказывание – отрицание общеутвердительного (см. [1, 17b 18, 18a 5, 19b 32-34, 20a 23, 24a 18-19, 26a 38, 26b 15-16]). Подобная трактовка частных высказываний (частноутвердительных и частноотрицательных) опять-таки полностью согласуется с предложенной ранее семантикой.

Аналогично Аристотель поступает и в «Аналитиках», где частными высказываниями он называет высказывания

> «о присущем или не присущем некоторым или присущем не всем» [1, 24a 18].

Такие пояснения приводятся им неоднократно и в других местах «Аналитик». Если теперь мы учтем соотношение логического квадрата $\neg SaP \dashv\vdash SoP$, то становится понятно, что частноотрицательное высказывание действительно не является экзистенциальным, а несет более слабую информацию:

$$\neg(\forall x(Sx \supset Px) \mathbin{\&} \exists xSx) \dashv\vdash \exists x(Sx \mathbin{\&} \neg Px) \vee \neg\exists xSx.$$

4) Наиболее отчетливо позиция Аристотеля выражена в десятой главе трактата «Категории», где обсуждается вопрос о видах противолежания и выделяется одна из его разновидностей – противоположность между утверждением и отрицанием. По мнению греческого философа, высказывания, противолежащие друг другу как утверждение и отрицание, таковы, что

> «всегда только одно из них необходимо истинно, другое ложно» [1, 13*a* 37-b2].

Но он тут же делает существенное замечание, отмечая, что иногда, казалось бы, бывает и не так:

> «ведь то, что Сократ здоров, противоположно тому, что Сократ болен. Но не всегда одно здесь необходимо истинно, а другое ложно. Если Сократ существует, то одно из них будет истинным, другое – ложным; а если его нет, то оба они ложны: ведь если вообще нет самого Сократа, неистинно и то, что Сократ болен, и то, что он здоров» [1, 13b 13-20].

И несколько далее, устанавливая более строго роль и значение отрицательной частицы «не» в сингулярных категорических высказываниях, он пишет:

> «Что же касается утверждения и отрицания, то существует ли [вещь] или нет – всегда одно из них будет ложным, а другое истинным. Ибо ясно, что если Сократ существует, одно из высказываний – "Сократ болен" и "Сократ не болен" – истинно, а другое ложно, и точно так же – если Сократа нет, ибо если его нет, то [высказывание] "он болен" ложно, а [высказывание] "он не болен" истинно» [1, 13b 27-33].

Этот отрывок во многих отношениях примечателен. На его основе мы получаем возможность четко установить аристотелевский смысл единичных высказываний. Действительно, пусть $E(v)$ будут высказыванием «v существует», тогда аристотелевское понимание можно задать в языке неэкзистенциальной логики предикатов с предикатом существования следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&v \text{ есть } P \;\rightarrow\; P(v) \,\&\, E(v),\\
&v \text{ есть не-}P \;\rightarrow\; \neg P(v) \,\&\, E(v),\\
&v \text{ не есть } P \;\rightarrow\; \neg P(v) \vee \neg E(v),\\
&v \text{ не есть не-}P \;\rightarrow\; (v) \vee \neg E(v).
\end{aligned}
$$

Здесь, как и в предполагаемой семантике, требование непустоты субъекта накладывается лишь на утвердительные высказывания (содержащие связку «есть»), в то время как отрицательные высказывания (содержащие связку «не есть») могут быть истинными и при пустом субъекте. Далее, здесь четко проявляется отличие внешнего (не есть P) и внутреннего (есть не-P) отрицаний, в частности, имеет место:

$$
\begin{aligned}
&\neg(v \text{ есть } P) \equiv v \text{ не есть } P,\\
&\neg(v \text{ есть не-}P) \equiv v \text{ не есть не-}P.
\end{aligned}
$$

5) Очень важным моментом, проясняющим семантику логики Аристотеля, является его отношение к так называемым «законам силлогистического тождества», т.е. к выражениям вида $S\mathbf{a}S$ и $S\mathbf{i}S$. Действительно, рассматриваемая нами интерпретация не позволяет считать эти формы законами силлогистики Аристотеля, так как формулы $\forall x(Sx \supset Sx) \,\&\, \exists xSx$ и $\exists x(Sx \,\&\, Sx)$ не являются законами. Поэтому если бы оказалось, что Аристотель принимал их в качестве законов своей

силлогистики, то это свидетельствовало бы о неадекватности предложенной интерпретации позиции Аристотеля.

Рассмотрение текстов «Аналитик» под этим углом зрения показывает, что греческий мыслитель действительно в некоторых случаях принимает в качестве истинных высказывания вида $S\mathbf{a}S$ и $S\mathbf{i}S$. Это дало повод многим исследователям полагать, что силлогистические тождества являются законами его логики. Однако это не так. Он не только не принимает эти положения в качестве законов, но и прямо их критикует, о чем недвусмысленно свидетельствует текст «Об истолковании».

В 11-й главе этого трактата Аристотель рассматривает высказывания со сложными терминами. В частности, он анализирует общеутвердительные высказывания со сложными субъектами и предикатами $(S \times P)\mathbf{a}R$ и $S\mathbf{a}(P \times R)$, где $(S \times P)$ и $(P \times R)$ есть сложные термины, репрезентирующие пересечения классов S с P и P с R. Рассматривая выражение $S\mathbf{a}(P \times R)$ Аристотель (как это ни покажется странным) критикует принцип $S\mathbf{a}P, S\mathbf{a}R \vdash S\mathbf{a}(P \times R)$, имея в виду то, что в традиционной логике стали называть *ограничение третьим*. Он приводит даже соответствующий пример: «этот человек кожевник», «этот человек хороший», но из этих двух высказываний совершенно справедливо, по Аристотелю, не вытекает высказывание «этот человек хороший кожевник».

На самом деле сингулярный термин «этот человек» берется здесь в разных универсумах. В первом случае речь идет о профессии человека, а во втором термин «хороший» может браться, например, в моральном смысле. Поэтому человек может быть одновременно и морально хорошим человеком и плохим кожевником.

Однако Аристотель принимает существенный для нас (см. [1, 20b 31-a15]) один из законов расширенной силлогистики, а именно – выводимость в обратную сторону:

$$S\mathbf{a}(P \times R) \vdash S\mathbf{a}P \,\&\, S\mathbf{a}R.$$

Рассмотрим теперь высказывания вида $(S \times P)\mathbf{a}R$. Аристотель задается прежде всего вопросом, в каких случаях является истинным утверждение $(S \times P)\mathbf{a}R$. Этот вопрос тесно связан с аналогичным вопросом о тождестве $(S \times P)\mathbf{a}(S \times P)$, которое представляет собой частный случай силлогистического тождества $S\mathbf{a}S$ и получается из $S\mathbf{a}S$ за счет подстановки вместо S сложного термина $(S \times P)$.

Аристотель пишет, что об отдельном человеке будет правильно говорить, «и притом без оговорок, например: этот определенный человек есть человек, или этот определенный бледный человек есть бледный человек. Однако не всегда: когда в прибавленном (имеется в виду, что субъект становится сложным за счет прибавления некоторого нового признака. – Авт.) содержится нечто противолежащее, из чего следует противоречие, высказывание не истинно, а ложно; например, если назвать умершего человека человеком» [1, 21*a* 18-23].

Здесь точка зрения о неприемлемости закона силлогистического тождества выражается Аристотелем с предельной ясностью. Он, собственно, указывает на тот момент, против которого нельзя принципиально высказать никаких возражений, а именно: он утверждает, что SaS не может рассматриваться как всегда истинное выражение, так как существуют такие конкретные подстановки терминов вместо переменной S, когда это выражение становится ложным. Это происходит в том случае, когда подставляемый термин противоречия. Таковым, например, является термин «умерший человек». Ведь быть умершим человеком – противоречие, так как всякий человек – это живое существо, а не мертвое.

Ход рассуждений Аристотеля можно реконструировать следующим образом. Пусть всегда истинным будет выражение SaS. Тогда для любого термина, и, в частности, для противоречивого термина $(S \times P)$ будет верно $(S \times P)\mathbf{a}(S \times P)$, например, «Всякий умерший человек есть умерший человек». Отсюда по указанному выше закону расширенной силлогистики, выраженному формулой $(S \times P)\mathbf{a}(S \times P) \vdash (S \times P)\mathbf{a}S\ \&\ (S \times P)\mathbf{a}P$, следует:

(1) Всякий умерший человек – мертв.
(2) Всякий умерший человек – человек.
(3) Всякий человек – живое существо,

а потому по модусу *Barbara* из (2) и (3) вытекает:

(4) Всякий умерший человек есть живое существо,

что является очевидно ложным утверждением.

Итак, Аристотель не признает за силлогистическим тождеством статуса закона. Но он полагает, что в некоторых особых случаях утверждения SaS и SiS являются истинными. Продолжая рассуждение, он пишет:

«Если же [противоречие] не содержится, то высказывание истинно. Или, вернее, когда [противоречие] содержится, высказывание всегда не истинно, а когда не содержится, оно не всегда истинно; например, Гомер есть что-то, скажем поэт; значит ли, что он есть или же его нет? Ведь "есть" сказывается здесь о Гомере приходящим образом, а именно: "есть" сказывается здесь о Гомере потому, что он есть поэт, а не само по себе. Так что в тех высказываниях, в которых не содержится противоположности, если имена заменяют определениями, и которые сказываются сами по себе, а не приходящим образом, будет и без оговорок правильно утверждать о том, что нечто есть. Что касается не-сущего, то, поскольку оно есть предмет мнения, неправильно утверждать, что оно нечто сущее, ибо мнение о нем имеется не потому, что оно есть, а потому, что его нет» [1, 21*a* 23-24].

Еще раз отметим, согласно Аристотелю, утвердительное высказывание «S есть P» всегда будет ложным, если в этом высказывании субъект является противоречивым термином. Иначе говоря, противоречивому объекту нельзя утвердительно предицировать никакое свойство. С другой стороны, если субъект не является противоречивым термином, то высказывание может быть как истинным, так и ложным.

Что же касается «Гомера», то, читая рассуждение Стагирита, можно наглядно представить себе ту ситуацию, в которой подобные сентенции могли появиться из уст Аристотеля. Вот он утверждает, что из высказывания «v есть P» вытекает «v есть». Но тут же следует возражение слушателей, что в таком случае из высказывания «Гомер есть поэт» должно выводиться предложение «Гомер есть». И задающий вопрос, и Аристотель знают, что Гомер умер и потому его нет, но это и придает остроту возражению Аристотелю, который вынужден подробно объяснять, в силу каких причин, в противоположность его мнению, из высказывания «Гомер есть поэт» не следует высказывание «Гомер есть». Здесь, поясняет Аристотель свою мысль, предикация «есть поэт» фиксирует не объективную, реальную присущность этого свойства Гомеру, а употребляется приходящим образом. В этой связи необходимо еще раз напомнить, что истинность, по Аристотелю, является отношением между объективной реальностью и нашим утверждением о ней. Но для предложения «Гомер есть поэт» подобного отношения между утверждением и объективной реальностью нет, так как нет той реальности, когда Гомер существует. Поэтому оно, если и является истинным, то не в настоящем (подлинном) смысле, а приходяще. Позиция Аристотеля в данном случае весьма последовательна и логична.

Для подтверждения этой точки зрения на силлогистические тождества можно было бы сослаться еще на те места из «Топики», где он прямо указывает:

> «сущее или познаваемое не сказывается о том, что не существует» [1, 121*a* 23-24], «не-сущее вообще не имеет никаких видов» [1, 128b 9].

(6) Семантическая точка зрения Аристотеля в определенном смысле богаче его синтаксических построений. Не принимая силлогистических тождести SaS и SiS в качестве тезисов своей силлогистики, он допускает их в качестве фактуально истинных утверждений в том случае, когда известно, что термин S не пуст, т.е. должны иметь место выводимости от существования S – $E(S)$ – к SaS и SiS:

$$E(S) \vdash SaS \qquad \text{и} \qquad E(S) \vdash SiS.$$

Поэтому в качестве тезисов его силлогистики могут быть приняты следующие утверждения:

$$SaP \vdash SaS, \quad SiP \vdash SaS,$$

которые должны быть присоединены к позитивной силлогистике Аристотеля, чтобы получилась семантически полная система. Для этого достаточно присоединить второе метаутверждение.

Теперь не составляет труда разобраться и в тех двух местах из «Аналитики», которые обычно принимаются как указания на принятие Аристотелем силлогистических тождеств.

(7) В первом тексте он обсуждает вопрос о перестановке терминов, т.е. об условиях, когда оказываются одновременно истинными высказывания SaP и PaS. В приводимой ниже цитате речь идет не о полной перестановке терминов, а о некоторой ограниченной перестановке. Предположим, говорит Аристотель, что имеют место высказывания «Всякий Б есть А» и «Всякий В есть А», и А более ни о чем другом не сказывается. И пусть, кроме этого, имеет место «Всякий В есть Б». Тогда, пишет Аристотель,

> «о всем том, о чем говорится А, говорится и Б, за исключением самого А» [1, 68*a* 16-21].

Действительно, из данных высказываний вытекает, что А говорится о Б и В, и более ни о чем. С другой стороны, Б говорится о В, так как «Всякий В есть Б», и (это самый важный пункт для нашей темы) о самом себе, поскольку «Б сказывается и о самом себе» [1, 68a 19], но Б не сказывается об А, так как из данных посылок нельзя вывести заключение «Всякое А есть Б». Таким образом, Аристотель сам полагает, что высказывание «Всякий Б есть Б» является истинным, что и приводится в качестве аргумента в пользу принятия Аристотелем закона силлогистического тождества в форме SaS.

Но в этом положении Аристотеля нет ничего странного, ведь он ранее принял в качестве истинного утверждения «Всякий Б есть А», а как было только что показано, в аристотелевской силлогистике должен иметь место тезис $SaP \vdash SaS$. Именно в силу этой причины и принимается, что высказывание «Всякий Б есть Б» является истинным. Поэтому данное место из «Аналитик» следует трактовать лишь как косвенное указание на приемлемость для него тезиса $SaP \vdash SaS$.

Второе место связано с содержанием главы 15 второй книги «Первой Аналитики», посвященной силлогизмам из противолежащих друг другу посылок. Под противолежащими «по словесному выражению» посылками Аристотель понимает пары высказываний, которые задаются отношениями логического квадрата:

$\langle a, e \rangle$ – контрарные,
$\langle a, o \rangle$– контрадикторные,
$\langle i, e \rangle$ – контрадикторные,
$\langle i, o \rangle$ – субконтрарные.

Иначе говоря, это такие пары высказываний, которые отличаются друг от друга по качеству. Однако пара $\langle i, o \rangle$ является противолежащей лишь «по словесному выражению», а не по существу, так как эти высказывания могут быть одновременно истинными. Из оставшихся трех пар посылки $\langle a, e \rangle$ он называл противоположными, а две другие пары относил к противолежащим по противоречию [1, 63b 21-30].

Далее Аристотель рассматривает возможность получения силлогизмов из противолежащих друг другу посылок для каждой фигуры и отмечает, что в I фигуре такие силлогизмы получаются не по всем модусам, а для III фигуры

> «утвердительного силлогизма никогда нельзя получить из противолежащих друг другу посылок... Отрицательный же полу-

чится, все равно, будут ли термины взяты в общих или не в общих посылках» [1, 64a 20-24].

Поясним данный фрагмент аристотелевского текста на примерах двух модусов III фигуры.

Felapton		*Bokardo*
Всякий *M* не есть *P*		Некоторый *M* не есть *P*
Всякий *M* есть *S*	и	Всякий *M* есть *S*
Некоторый *S* не есть *P*		Некоторый *S* не есть *P*.

Аристотель преобразует силлогизмы из противолежащих посылок посредством отождествления крайних терминов, т.е. подстановки, например, вместо термина *P* термина *S*. Ясно, что такая подстановка даст нам соответственно силлогизмы:

Всякий *M* не есть *S*		Некоторый *M* не есть *S*
Всякий *M* есть *S*	и	Всякий *M* есть *S*
Некоторый *S* не есть *S*		Некоторый *S* не есть *S*.

В первом случае посылки оказываются противоположными – пара «*a*, *e*», а во втором они противолежат по противоречию – пара «*a*, *o*». Аристотель приводит пример рассуждения по модусу *Felapton*:

> «Если же принимается, что всякое врачебное искусство есть знание и что никакое врачебное искусство не есть знание, то берутся [посылки]: Б присуще всем А, а В не присуще ни одному А. Так что такое-то знание не будет знанием» [1, 64*a* 24-26].

По поводу данных силлогизмов Аристотель несколько ниже замечает, что если из просто ложных посылок можно получить истинное заключение, то из противолежащих нельзя, ибо

> «заключение в таком случае оказывается всегда противоположным действительному положению вещей, как, например, если это благо, делается вывод, что оно не есть благо; или, если вот это есть живое существо, – что оно не есть живое существо» [1, 64b 8-12].

Это место обычно понимается в том смысле, что коль скоро Аристотель полагает высказывания *SeS* и *SoS* всегда ложными, то отсюда по логическому квадрату сразу же должна следовать истинность высказываний *SaS* и *SiS*.

Однако такое понимание находится в прямом противоречии с тем, что утверждает Аристотель о высказывания вида *a*, когда критикует тезис *SaS*. На самом деле здесь нет никакого противоречия, так как философ прямо указывает, что высказывания *SeS* и *SoS* противоположны именно «действительному положению вещей», т.е. он рассматривает их по отношению к действительности, сущему, и, следовательно, термины, входящие в них, должны быть не пусты. Ведь Аристотель не просто заявляет, что предложения «Благо не есть благо», «Живое существо не есть живое существо» ложны, но высказывает условное утверждение «если это есть благо, делается вывод, что это не есть благо». Антецедент этого утверждения представляет собой экзистенциальную предпосылку, говорящую о непустоте терминов «благо» и «живое существо». Таким образом, и данный текст согласуется с вышеприведенной семантикой.

Рассмотренные аргументы являются полным списком тех доводов и рассуждений, которые обычно приводят в пользу того мнения, что Аристотель принимал законы силлогистического тождества. Как видно из сказанного, ни один из них не может считаться решающим и вызывающим доверие. Более того, как было показано, можно обосновать совершенно иное истолкование этих мест. В пользу нашей позиции ниже будут приведены еще некоторые доводы, связанные с рассмотрением негативной аристотелевской силлогистики. Все аргументы, которые мы приводим для подтверждения своей точки зрения, собранные вместе, хорошо согласуются друг с другом и являются достаточно убедительными.

§ 4. Негативная и сингулярная силлогистики Аристотеля

В данном параграфе мы рассмотрим вопрос о различных расширениях позитивной силлогистики, которые были намечены самим Аристотелем. Именно намечены, потому что, как уже отмечалось выше, систематически он не рассматривал эти системы. Прежде всего, остановимся на расширении позитивной силлогистики до системы негативной силлогистики, осуществляемом введением отрицательных терминов.

Чтобы такое расширение оказалось нетривиальным, необходимо в новой системе установить дополнительные закономерные отношения, которые бы связывали позитивные формы выражений с негативными. Как уже говорилось в предыдущей главе, в традиционной логике эту роль выполняют принципы превращения (*obversio*):

$SaP \dashv\vdash Se{\sim}P$,
$SeP \dashv\vdash Sa{\sim}P$,
$SiP \dashv\vdash So{\sim}P$,
$SoP \dashv\vdash Si{\sim}P$.

Однако данные правила дедукции не являются аристотелевскими, поскольку предполагают иную, чем у него, семантику.

Так как в традиционной логике имеют место эквивалентности

«есть P» равносильно «не есть не-P»,
«есть не-P» равносильно «не есть P»,

то это неизбежно ведет к особому способу разбиения всех высказываний на утвердительные и отрицательные. К утвердительным здесь должны быть отнесены высказывания с нулевым или четным количеством знаков отрицания, стоящих перед связкой и предикатом. Например, высказывание «x не есть не-P» должно пониматься как утвердительное. Высказывания же вида «x не есть P» и «x есть не-P» должны быть отнесены к отрицательным, так как число знаков отрицания здесь нечетно. Это означает, что в традиционной логике не различаются отрицания перед связкой и перед предикатом.

Совершенно иную концепцию мы обнаруживаем у Аристотеля. В 46-й главе первой книги «Первой Аналитики» он ставит вопрос, имеют ли одинаковое значение выражения «не быть этим» и «быть не этим». Его ответ на этот вопрос таков: «быть не белым» и «не быть белым» – это не одно и то же. Такое различие указанных выражений оправдывается Аристотелем тем, что отрицанием «есть P» должно быть «не есть P», но никак не «есть не-P». Подобная же позиция развивается им и в трактате «Об истолковании».

Принятая Аристотелем точка зрения ведет к отличной от традиционной трактовке отрицательных и утвердительных высказываний. В самом деле, он полагает, что высказывания формы «v есть P» и «v есть не-P» выражают утверждение, а высказывания формы «v не есть P» и «v не есть не-P» выражают отрицание. Он считает, что вопрос, какие простые высказывания содержат утверждения, а какие отрицания, решается в зависимости от характера предицирующей связки, т.е. является ли ею связка «есть» или «не есть».

В отличие от традиционной силлогистики в логике Аристотеля правомерны лишь превращения утвердительных высказываний в отрицательные:

v есть P $\vdash$ v не есть $\sim P$,
v есть $\sim P$ $\vdash$ v не есть P,

$SaP \vdash Se{\sim}P$,
$Sa{\sim}P \vdash SeP$,
$SiP \vdash So{\sim}P$,
$Si{\sim}P \vdash SoP$,

но никак не переходы от отрицательных высказываний к утвердительным (см. [1, 20а 21–23]).

Эта концепция операции превращения еще раз и опять-таки достаточно определенно и прямо подтверждает ту самую интерпретацию категорических высказываний, которая была нами выше атрибутирована Стагириту. Данные семантические построения делают понятными и те соображения, которые заставили его принять выводимости лишь в одну сторону. Действительно, при пустом субъекте отрицательное высказывание является истинным, а результат его обращения – утвердительное высказывание – ложным.

Что касается дедуктивной системы негативной силлогистики Аристотеля, которая могла бы быть построена в его духе, то в качестве таковой может быть предложено следующее исчисление. Основными выводимостями являются:

$$\frac{MaP,\ SaM}{Se{\sim}P,}\qquad \frac{MeP,\ SiM}{Si{\sim}P,}\qquad \frac{}{Se{\sim}S,}$$

$$\frac{}{So{\sim}S,}\qquad \frac{SeP}{PeS,}\qquad \frac{SaP}{Se{\sim}P,}\qquad \frac{SaP}{SaS.}$$

В качестве правил вывода могут использоваться, как и ранее, правила **R**, **C**, **П**, **У**, **Сеч**, **U**, **K** и правило снятия двойного терминного отрицания:

$$\frac{\mathbf{A}({\sim}{\sim}R)}{\mathbf{A}(R).}$$

Остановимся теперь кратко на вопросе о допустимости сингулярных терминов в силлогистике Аристотеля. Сомнение по этому поводу было высказано Я. Лукасевичем. Основанием ему послужило то рассуждение из «Первой Аналитики», где Аристотель приводит классификацию терминов в связи с их сказыванием или не сказыванием друг о друге. Стагирит пишет:

«Из всего существующего иное таково, что оно не может истинно сказываться как общее о чем-либо другом, как, например, Клеон или Каллий и все единичное и чувственно воспринимаемое; но о них может сказываться остальное... Иное из существующего таково, что хотя само сказывается о другом и другое – о нем самом, как, например, "человек" – о Каллии, а "живое существо" – о человеке. Ясно, таким образом, что иное из существующего по своей природе таково, что не может о чем-либо сказываться, разве что привходящим образом. Говорим же мы иногда, что то бледное есть Сократ, а то, что идет [к нам], – Каллий» [1, 43a 25-35].

Заканчивается данный текст следующим замечанием:

«Рассуждения и исследования имеют своим предметом главным образом, пожалуй, это промежуточное» [1, 43a 45].

Исходя из данного места «Аналитик», естественно предположить, что Аристотель отбросил единичные термины как возможные подстановки для терминных переменных, так как они не могут быть предикатами истинных предложений. Для чистой же силлогистики является существенным, чтобы один и тот же термин мог быть использован и как субъект, и как предикат. По нашему мнению, Аристотель действительно запрещает использовать единичные термины на местах предикатов, но отсюда вовсе не следует принципиальная невозможность сочетания силлогистики с сингулярными терминами. Кроме того, данное мнение прямо вступает в противоречие с теми конкретными примерами силлогизмов с единичными терминами, которые приводятся самим Аристотелем.

Характерной в данном отношении является глава 33 первой книги «Первой Аналитики», где рассматривается ошибка, происходящая от смешения утверждений «это присуще этому» и «это присуще всему этому», которые, как говорит Стагирит, «почти ничем не отличаются друг от друга» (см. [1, 47b 37-40]). Он разбирает рассуждение:

Мыслимый Аристомен существует всегда
Аристомен есть мыслимый Аристомен
―――――――――――――――――――
Аристомен существует всегда,

с единичными высказываниями. Аристотель не принимает это рассуждение. По его мысли, «чтобы получился силлогизм», следовало бы взять первую посылку общей, т.е. в форме «Всякий мыслимый Аристомен существует всегда». Отсюда ясно, что Аристотель не признает выводы вида «w есть P, v есть $w \vdash v$ есть P» правомерными – ведь в таком случае во второй посылке на месте предиката стоял бы единичный термин, что он не допускает. И потому, «чтобы получился силлогизм», он предлагает рассматривать термин «мыслимый Аристомен» как общий, что сводит данное рассуждение к модусу с сингулярными меньшей посылкой и заключением –

«Всякий S есть P, v есть $S \vdash v$ есть P»,

в котором бóльшая посылка ложна. Но тем самым Аристотель прямо принимает и оправдывает силлогизмы с единичными терминами.

В этой же главе рассматривается еще одно рассуждение с единичными терминами «Миккал» и «образованный Миккал». В ряде других мест «Аналитик» он обращается к данного рода силлогизмам, привлекая такие единичные термины, как «эта самка мула», «война афинян против фиванцев», «эта женщина», «Питтак», «Луна» (см. [1, 67a 33-37, 68b 41-a11, 70a 14-33, 78b 4-10, 93a 30-b7]). Все это говорит о не случайности его интереса к сингулярной силлогистике.

В заключение заметим, что Аристотель сделал не только первые самые общие наметки негативной и сингулярной силлогистик, но и расширенной силлогистики. В этой связи, не разворачивая подробно эту тему, просто еще раз обратим внимание на тот закон расширенной силлогистики, который был нами упомянут выше.

Глава III

ЧИСТЫЕ ПОЗИТИВНЫЕ СИЛЛОГИСТИКИ

§ 1. Фундаментальная чистая позитивная силлогистика

В данной главе будут исследованы системы чистой позитивной силлогистики, т.е. такие теории выводов из категорических высказываний, в языке которых содержатся нелогические термины единственного типа – универсалии, причем последние рассматриваются без учета их внутренней структуры. Исследование начнем с анализа так называемой фундаментальной силлогистики.

Рассмотрим стандартный перевод формул языка чистой позитивной силлогистики на язык логики предикатов. Пусть * есть рекурсивная функция, сопоставляющая каждой силлогистической формуле некоторую формулу языка логики предикатов согласно следующим правилам:

$SaP^* = \forall x(Sx \supset Px)$, $\qquad SeP^* = \forall x(Sx \supset \neg Px)$,

$SiP^* = \exists x(Sx \,\&\, Px)$, $\qquad SoP^* = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px)$,

$(\neg \mathbf{A})^* = \neg(\mathbf{A}^*)$, $\qquad (\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \triangledown \mathbf{B}^*$,

где $\triangledown$ есть $\&$, $\vee$, $\supset$, или $\equiv$.

Данный перевод задает известную лейбницевско-брентановскую интерпретацию категорических высказываний, которая детерминирует класс силлогистических законов, называемый *фундаментальной силлогистикой*. Иными словами, произвольная формула силлогистического языка **A** является законом фундаментальной силлогистики в том и только том случае, когда ее перевод **A*** является законом логики предикатов.

Исчислением, формализующим класс законов чистой позитивной фундаментальной силлогистики, является следующая аксиоматическая система **СФ**. Она представляет переформулировку исчисления, предложенного Шефердсоном [82, с. 144]. Схемами аксиом **СФ** являются:

СФ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

СФ1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$, $\qquad$ **СФ5**. $SiP \supset SiS$,

СФ2. $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$, $\qquad$ **СФ6**. $SoP \supset SiS$,

СФ3. $SeP \supset PeS$, $\qquad$ **СФ7**. $SeP \equiv \neg SiP$,

СФ4. SaS, $\qquad$ **СФ8**. $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственным правилом вывода в **СФ** является *modus ponens*. Понятия доказательства и теоремы определяются обычным образом.

Общий план доказательства (осуществленного В.И. Маркиным в [36]) погружаемости системы **СФ** в классическое одноместное исчисление предикатов (**ИП**) посредством перевода * состоит в выполнении следующих шагов.

Сначала строится семантика силлогистического языка и показывается, что класс теорем **СФ** совпадает с классом общезначимых в данной семантике формул. Тем самым обосновывается утверждение о семантической непротиворечивости и полноте системы **СФ**:

Утверждение 1.

$$\dot{\forall}\, \mathbf{A}(\mathbf{СФ} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{СФ} \vDash \mathbf{A}).$$

Знак $\dot{\forall}$ означает здесь квантор общности метаязыка, а «е.т.е.» – сокращение для «если и только если» – метаязыковой эквиваленции.

Далее доказывается равносильность **СФ**-общезначимости произвольной силлогистической формулы и общезначимости в логике предикатов (**ЛП**) ее *-перевода, т.е. доказывается справедливость следующего утверждения:

Утверждение 2.

$$\dot{\forall}\, \mathbf{A}(\mathbf{СФ} \vDash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{ЛП} \vDash \mathbf{A}^*).$$

Далее используется утверждение, являющееся следствием известных метатеорем о семантической непротиворечивости и полноте исчисления предикатов:

Утверждение 3.

$$\dot{\forall}\, \mathbf{A}(\mathbf{ЛП} \vDash \mathbf{A}^*, \text{ е.т.е. } \mathbf{ИП} \vdash \mathbf{A}^*).$$

Из **Утверждений 1**, **2** и **3** непосредственно получаем

Утверждение 4.

$$\dot{\forall}\, \mathbf{A}(\mathbf{СФ} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{ИП} \vdash \mathbf{A}^*),$$

которое как раз и представляет собой тезис о погружаемости **СФ** в **ИП** посредством перевода *.

Начнем с построения семантики системы **СФ**. *Моделью* назовем пару <**D**, φ>, в которой **D** есть произвольное непустое множество, а φ – функция, сопоставляющая терминам силлогистического языка подмножества из **D**. Определим *функцию* $|\ |^{D}_{\varphi}$ (или сокращенно – $|\ |_{\varphi}$) *означивания формул* в модели <**D**, φ> – функцию, отображающую множество силлогистических формул на множество истинностных значений $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ при фиксированных $\mathbf{D}$ и φ:

И1. $|SaP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$.
И2. $|SiP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing$.
И3. $|SeP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \varnothing$.
И4. $|SoP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \varnothing$.
И5. $|\neg\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{0}$.
И6. $|\mathbf{A} \;\&\; \mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1} \;\dot{\&}\; |\mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1}$.
И7. $|\mathbf{A} \vee \mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1} \;\dot{\vee}\; |\mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1}$.
И8. $|\mathbf{A} \supset \mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; |\mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1}$.
И9. $|\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $(|\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; |\mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1}) \;\dot{\&}\; (|\mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; |\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1})$.

Здесь знаки $\dot{\&}$, $\dot{\vee}$, $\dot{\supset}$ обозначают соответственно конъюнкцию, дизъюнкцию и материальную импликацию метаязыка.

Формула $\mathbf{A}$ *истинна в модели* $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$, е.т.е. $|\mathbf{A}|^{\mathbf{D}}_\varphi = \mathbf{1}$. Формула $\mathbf{A}$ называется **СФ**-*общезначимой* (сокращенно – **СФ** $\vDash$ $\mathbf{A}$), е.т.е. $\mathbf{A}$ истинна в каждой модели указанного типа.

Покажем теперь, что система **СФ** непротиворечива и полна относительно сформулированной семантики.

Метатеорема 1.

Всякая теорема **СФ** *является* **СФ**-*общезначимой формулой, т.е.*

$$\dot{\forall}\,\mathbf{A}(\text{СФ} \vdash \mathbf{A} \;\dot{\supset}\; \text{СФ} \vDash \mathbf{A}).$$

Для доказательства метатеоремы достаточно убедиться в том, что все аксиомы **СФ**-общезначимы, а правило *modus ponens* сохраняет свойство «быть **СФ**-общезначимой формулой». Демонстрация этого не встречает затруднений. В качестве примера покажем **СФ**-общезначимость аксиомой схемы **СФ1**:

1.	$\lvert MaP \;\&\; SaM\rvert_\varphi = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\lvert MaP\rvert_\varphi = \mathbf{1} \;\dot{\&}\; \lvert SaM\rvert_\varphi = \mathbf{1}$	1; **И6**
3.	$\varphi(M) \subseteq \varphi(P) \;\dot{\&}\; \varphi(S) \subseteq \varphi(M)$	2; **И1**
4.	$(\varphi(M) \subseteq \varphi(P) \;\dot{\&}\; \varphi(S) \subseteq \varphi(M)) \;\dot{\supset}\; \varphi(S) \subseteq \varphi(P)$	транзит. $\subseteq$
5.	$\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$	3, 4; $\dot{\supset}_{\text{и}}$
6.	$\lvert SaP\rvert_\varphi = \mathbf{1}$	5; **И1**
7.	$\lvert MaP \;\&\; SaM\rvert_\varphi = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; \lvert SaP\rvert_\varphi = \mathbf{1}$	1-6; $\dot{\supset}_{\text{в}}$
8.	$\lvert(MaP \;\&\; SaM) \supset SaP\rvert_\varphi = \mathbf{1}$	7; **И8**
9.	$\dot{\forall}\,\mathbf{D}\,\dot{\forall}\,\varphi\,\lvert(MaP \;\&\; SaM) \supset SaP\rvert^{\mathbf{D}}_\varphi = \mathbf{1}$	8; $\dot{\forall}_{\text{в}}$
10.	**СФ** $\vDash (MaP \;\&\; SaM) \supset SaP$	9; определение. $\vDash$

Таким образом, семантическая непротиворечивость системы **СФ** доказана.

Метатеорема о полноте системы **СФ** относительно предложенной семантики – утверждение, обратное **Метатеореме 1**, – доказывается методом Хенкина. Введем для этого следующие необходимые понятия.

Назовем множество Γ силлогистических формул **СФ**-*непротиворечивым*, е.т.е. для любых формул $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$, взятых из Γ, формула $\neg(\mathbf{A}_1 \;\&\; \mathbf{A}_2 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathbf{A}_n)$ не доказуема в **СФ**.

Назовем множество формул $\blacktriangle$ **СФ**-*максимальным*, е.т.е. оно **СФ**-непротиворечиво и $\dot{\forall}\,\mathbf{A}\,(\mathbf{A} \in \blacktriangle \;\dot{\vee}\; \neg\mathbf{A} \in \blacktriangle)$. Нетрудно показать, что любое **СФ**-максимальное множество обладает следующими важными свойствами:

(а) все теоремы **СФ** содержатся в $\blacktriangle$,
(б) $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \in \blacktriangle \;\dot{\&}\; \mathbf{A} \in \blacktriangle) \;\dot{\supset}\; \mathbf{B} \in \blacktriangle$,
(в) $\neg\mathbf{A} \in \blacktriangle$, е.т.е. $\mathbf{A} \notin \blacktriangle$,
(г) $\mathbf{A} \;\&\; \mathbf{B} \in \blacktriangle$, е.т.е. $\mathbf{A} \in \blacktriangle \;\dot{\&}\; \mathbf{B} \in \blacktriangle$,
(д) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \in \blacktriangle$, е.т.е. $\mathbf{A} \in \blacktriangle \;\dot{\vee}\; \mathbf{B} \in \blacktriangle$,
(е) $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \in \blacktriangle$, е.т.е. $\mathbf{A} \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; \mathbf{B} \in \blacktriangle$,
(ж) $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \in \blacktriangle$, е.т.е. $(\mathbf{A} \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; \mathbf{B} \in \blacktriangle) \;\dot{\&}\; (\mathbf{B} \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; \mathbf{A} \in \blacktriangle)$.

Теперь нетрудно доказать аналог леммы Линденбаума:

Лемма 1.

Произвольное **СФ**-*непротиворечивое множество силлогистических формул* Γ *можно расширить до* **СФ**-*максимального множества* $\blacktriangle$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots$ – пересчет всех формул силлогистического языка. Построим последовательность множеств $\blacktriangle_1, \blacktriangle_2, \ldots$ следующим образом: $\blacktriangle_1 = \Gamma$; $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n$, если $\blacktriangle_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **СФ**-противоречиво, в противном случае – $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$.

$$\text{Пусть } \blacktriangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} \blacktriangle_n.$$

Тривиально показывается **СФ**-максимальность множества $\blacktriangle$.

Следующий этап доказательства полноты системы **СФ** связан с построением так называемых *канонических моделей*. Для этого каждому **СФ**-максимальному множеству формул $\blacktriangle$ сопоставим модель $\langle\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle\rangle$, где $\mathbf{D}_\blacktriangle$ – множество всевозможных пар терминов силлогистического языка, а $\varphi_\blacktriangle$ – функция, которая приписывает произвольному термину S множество пар терминов $\langle M, T\rangle$ таких, что MiT & $(MaS \vee TaS) \in \blacktriangle$. Ясно, что любая каноническая модель $\langle \mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle\rangle$ относится к классу моделей заданной ранее семантики, поскольку из определений $\mathbf{D}_\blacktriangle$ и $\varphi_\blacktriangle$ следует, что $\mathbf{D}_\blacktriangle \neq \varnothing$, а $\varphi_\blacktriangle(S) \subseteq \mathbf{D}_\blacktriangle$.

Лемма 2.

Для канонической модели $\langle \mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle\rangle$, *произвольного* **СФ**-*максимального множества* $\blacktriangle$ *и произвольной формулы* $\mathbf{A}$ *верно, что* $\lvert\mathbf{A}\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = 1$, *е.т.е.* $\mathbf{A} \in \blacktriangle$.

Лемма доказывается индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**. Базис индукции содержит четыре случая.

I. $\mathbf{A} \equiv SaP$ (где «$\equiv$» – знак графического равенства).

Доказем сначала, что $\lvert SaP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = 1 \;\dot{\supset}\; SaP \in \blacktriangle$.

1.	$\lvert SaP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = 1$	допущение
2.	$SaP \notin \blacktriangle$	допущение
3.	$\dot{\forall} M \dot{\forall} T(MiT \;\&\; (MaS \vee TaS) \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; MiT \;\&\; (MaP \vee TaP) \in \blacktriangle)$	1; **И1**, опр. $\varphi_\blacktriangle$ и $\subseteq$
4.	$\neg SaP \in \blacktriangle$	2; (в)
5.	$\neg SaP \supset SoP \in \blacktriangle$	**СФ8**, (а)
6.	$SoP \supset SiS \in \blacktriangle$	**СФ6**, (а)
7.	$SiS \in \blacktriangle$	4, 5, 6; (б)
8.	$SaS \in \blacktriangle$	**СФ4**, (а)
9.	$SiS \;\&\; (SaS \vee SaS) \in \blacktriangle$	7, 8; (д), (г)
10.	$SiS \;\&\; (SaS \vee SaS) \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; SiS \;\&\; (SaP \vee SaP) \in \blacktriangle$	3; $\dot{\forall}_{и}$
11.	$SiS \;\&\; (SaP \vee SaP) \in \blacktriangle$	9, 10; $\supset_{и}$
12.	$SaP \in \blacktriangle$	11; (г), (д)
13.	$SaP \in \blacktriangle$	2, 12; от противного

Докажем теперь, что $SaP \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; \lvert SaP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = 1$.

1.	$SaP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$MiT \;\&\; (MaS \vee TaS) \in \blacktriangle$	допущение
3.	$MiT \in \blacktriangle$	2; (г)
4.	$MaS \in \blacktriangle \;\dot{\vee}\; TaS \in \blacktriangle$	2; (г), (д)
5.	$MaS \in \blacktriangle$	допущение
6.	$(SaP \;\&\; MaS) \supset MaP \in \blacktriangle$	**СФ1**, (а)
7.	$MaP \in \blacktriangle$	6, 1, 5; (г), (б)
8.	$MaP \vee TaP \in \blacktriangle$	7; (д)

9.	$TaS \in \blacktriangle$	допущение
10.	$(SaP \;\&\; TaS) \supset TaP \in \blacktriangle$	**СФ1**, (а)
11.	$TaP \in \blacktriangle$	10, 1, 9; (г), (б)
12.	$MaP \vee TaP \in \blacktriangle$	11; (д)
13.	$MaP \vee TaP \in \blacktriangle$	4, 5-8, 9-12; разбор случаев
14.	$MiT \;\&\; (MaP \vee TaP) \in \blacktriangle$	3, 13; (г)
15.	$\dot{\forall} M \dot{\forall} T(MiT \;\&\; (MaS \vee TaS) \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; MiT \;\&\; (MaP \vee TaP) \in \blacktriangle)$	2-14; $\supset_{в}$, $\dot{\forall}_{в}$
16.	$\lvert SaP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = 1$	15; опр. $\varphi_\blacktriangle$ и $\subseteq$, **И1**

II. $\mathbf{A} \equiv SiP$.

Покажем сначала, что $\lvert SiP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = 1 \;\dot{\supset}\; SiP \in \blacktriangle$.

1.	$\lvert SiP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = 1$	допущение
2.	$SiP \notin \blacktriangle$	допущение
3.	$\exists M \exists T(MiT \;\&\; (MaS \vee TaS) \in \blacktriangle \;\dot{\&}\; MiT \;\&\; (MaP \vee TaP) \in \blacktriangle)$	1; **И2**, опр. $\varphi_\blacktriangle$
4.	$SeP \in \blacktriangle$	2, **СФ7**; (а), (б), (в)
5.	$MiT \in \blacktriangle$	
6.	$MaS \vee TaS \in \blacktriangle$	3; $\exists_{и}$, (г)
7.	$MaP \vee TaP \in \blacktriangle$	
8.	$(MaS \in \blacktriangle \;\dot{\&}\; MaP \in \blacktriangle) \;\dot{\vee}\; (TaS \in \blacktriangle \;\dot{\&}\; TaP \in \blacktriangle) \;\dot{\vee}\; (MaS \in \blacktriangle \;\dot{\&}\; TaP \in \blacktriangle) \;\dot{\vee}\; (TaS \in \blacktriangle \;\dot{\&}\; MaP \in \blacktriangle)$	6, 7; (д)
9.	$MaS \in \blacktriangle \;\dot{\&}\; MaP \in \blacktriangle$	допущение
10.	$MaS \in \blacktriangle$	9; $\dot{\&}_{и}$
11.	$MaP \in \blacktriangle$	
12.	$SeP \;\&\; MaS \in \blacktriangle$	4, 10; (г)
13.	$(SeP \;\&\; MaS) \supset MeP \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)
14.	$MeP \in \blacktriangle$	13, 12; (б)
15.	$MeP \supset PeM \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
16.	$PeM \in \blacktriangle$	15, 14; (б)
17.	$PeM \;\&\; MaP \in \blacktriangle$	16, 11; (г)
18.	$(PeM \;\&\; MaP) \supset MeM \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)
19.	$MeM \in \blacktriangle$	18, 17; (б)
20.	$MeM \supset \neg MiM \in \blacktriangle$	**СФ7**, (а)
21.	$\neg MiM \in \blacktriangle$	20, 19; (б)
22.	$\neg MiM \supset \neg MiT \in \blacktriangle$	контрапозиция **СФ5**, (а)
23.	$\neg MiT \in \blacktriangle$	22, 21; (б)

24.	$TaS \in \blacktriangle \ \& \ TaP \in \blacktriangle$	допущение
.		
.		подвывод
.		аналогичен 9-23
38.	$\neg MiT \in \blacktriangle$	
39.	$MaS \in \blacktriangle \ \& \ TaP \in \blacktriangle$	допущение
40.	$MaS \in \blacktriangle$	45; $\&_{и}$
41.	$TaP \in \blacktriangle$	45; $\&_{и}$
42.	$SeP \ \& \ MaS \in \blacktriangle$	4, 40; (г)
43.	$(SeP \ \& \ MaS) \supset MeP \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)
44.	$MeP \in \blacktriangle$	43, 42; (б)
45.	$MeP \supset PeM \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
46.	$PeM \in \blacktriangle$	45, 44; (б)
47.	$PeM \ \& \ TaP \in \blacktriangle$	46, 41; (г)
48.	$(PeM \ \& \ TaP) \supset TeM \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)
49.	$TeM \in \blacktriangle$	48, 47; (б)
50.	$TeM \supset MeT \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
51.	$MeT \in \blacktriangle$	50, 49; (б)
52.	$MeT \supset \neg MiT \in \blacktriangle$	**СФ7**, (а)
53.	$\neg MiT \in \blacktriangle$	52, 51; (б)
54.	$TaS \in \blacktriangle \ \& \ MaP \in \blacktriangle$	допущение
.		
.		подвывод
.		аналогичен 39-53
68.	$\neg MiT \in \blacktriangle$	
69.	$\neg MiT \in \blacktriangle$	8, 9-23, 24-38, 39-53, 54-68; разбор случаев
70.	$MiT \notin \blacktriangle$	69; (в)
71.	$SiP \in \blacktriangle$.	5, 70; от противного

Докажем теперь, что $SiP \in \blacktriangle \ \dot{\supset} \ |SiP|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$.

1.	$SiP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$SaS \in \blacktriangle$	**СФ4**, (а)
3.	$PaP \in \blacktriangle$	**СФ4**, (а)
4.	$SiP \ \& \ (SaS \vee PaS) \in \blacktriangle$	1, 2; (г), (д)
5.	$SiP \ \& \ (SaP \vee PaP) \in \blacktriangle$	1, 3; (г), (д)
6.	$\exists M \exists T(MiT \ \& \ (MaS \vee TaS) \in \blacktriangle \ \dot{\&} \ MiT \ \& \ (MaP \vee TaP) \in \blacktriangle)$	4, 5; $\dot{\&}_{в}$, $\exists_{в}$
7.	$|SiP|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	6; определение. $\varphi_\blacktriangle$, **И2**

III. A $=$ SeP

$|SeP|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi_\blacktriangle(S) \cap \varphi_\blacktriangle(P) = \varnothing$ (в силу **И3**), е.т.е. $|SiP|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{0}$ (в силу **И2**), е.т.е. $SiP \notin \blacktriangle$ (случай **II** данной леммы), е.т.е. $\neg SiP \in \blacktriangle$ (в силу свойства (в) максимального множества), е.т.е. $SeP \in \blacktriangle$ (в силу **СФ7** и свойств (а), (ж)).

IV. A $=$ SoP.

Случай **IV** сводится к случаю **I** в силу наличия в $\blacktriangle$ аксиомы **СФ8**, а также того факта, что условия истинности SoP противоречат условиям истинности SaP.

Доказательство индуктивного перехода включает рассмотрение случаев, когда **A** является сложной формулой. При этом используется индуктивное допущение о справедливости утверждения леммы для всех формул с меньшим чем у **A** числом связок.

V. A $=$ $\neg$**B**.

$|\neg \mathbf{B}|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\mathbf{B}|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{0}$ (в силу **И5**), е.т.е. $\mathbf{B} \notin \blacktriangle$ (по индуктивному допущению), е.т.е. $\neg \mathbf{B} \in \blacktriangle$ (в силу свойства (в) множества $\blacktriangle$).

VI. A $=$ **B** & **C**.

$|\mathbf{B} \ \& \ \mathbf{C}|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$, е.т.е. $|\mathbf{B}|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1} \ \dot{\&} \ |\mathbf{C}|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$ (в силу **И6**), е.т.е. $\mathbf{B} \in \blacktriangle \ \dot{\&} \ \mathbf{C} \in \blacktriangle$ (по индуктивному допущению), е.т.е. $\mathbf{B} \ \& \ \mathbf{C} \in \blacktriangle$ (в силу (г)).

Случаи, когда **A** имеет вид **B** $\vee$ **C**, **B** $\supset$ **C** и **B** $\equiv$ **C**, доказываются аналогично. На этом доказательство **Леммы 2** *завершено*.

Теперь нетрудно доказать метатеорему о полноте системы **СФ** относительно предложенной семантики.

Метатеорема 2.
Всякая **СФ**-*общезначимая формула является теоремой* **СФ**, *т.е.*

$$\dot{\forall} \mathbf{A}(\mathbf{СФ} \models \mathbf{A} \ \dot{\supset} \ \mathbf{СФ} \vdash \mathbf{A}).$$

Допустим, что некоторая **СФ**-общезначимая формула **A** недоказуема в **СФ**. Тогда и $\neg\neg$**A** не является теоремой этой системы, а это означает, что множество $\{\neg \mathbf{A}\}$ **СФ**-непротиворечиво. Расширим его до максимального **СФ**-непротиворечивого множества $\blacktriangle$. Поскольку $\neg \mathbf{A} \in \blacktriangle$, постольку (в силу только что доказанной леммы) $|\neg \mathbf{A}|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$ в канонической модели $\langle \mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle \rangle$. Значит, в силу **И5**, в этой модели формула **A** ложна, что противоречит допущению о ее **СФ**-общезначимости. **Метатеорема 2** *доказана*.

Доказательство **Метатеорем 1** и **2** обосновывает справедливость **Утверждения 1**:

$$\dot{\forall}\,\mathbf{A}(\mathbf{С\Phi} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{С\Phi} \models \mathbf{A}).$$

Таким образом, первый этап доказательства о погружаемости **СФ** в исчисление предикатов завершен. Перейдем теперь к обоснованию справедливости **Утверждения 2**.

Пару $<\mathbf{D}, \varphi>$ можно рассматривать не только как модель для означивания силлогистических формул. Она является также стандартной моделью для оценки формул классического одноместного исчисления предикатов (для простоты будем считать, что в его алфавите отсутствуют предметные константы и предметные функторы). Действительно, в классической логике предикатов постулируется непустота предметной области **D**, а φ сопоставляет одноместным предикаторам (пусть их список совпадает со списком силлогистических терминов) подмножества **D**. Функция $\| \ \|^{\mathbf{D}}_{\varphi}$ (сокращенно – $\| \ \|_{\varphi}$) *означивания* формул языка логики предикатов при приписывании их свободным переменным некоторых объектов из **D** определяется следующим образом:

П1. $\|P\alpha\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании переменной α объекта $\mathbf{d}$ из **D**, е.т.е. $\mathbf{d} \in \varphi(P)$.

Далее положим, что $\beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ – список всех свободных переменных, входящих в $\neg\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, $\forall\alpha\mathbf{A}$, $\exists\alpha\mathbf{A}$.

П2. $\|\neg\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании $\beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ объектов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2,..., \mathbf{b}_n$ из **D**, е.т.е. $\|\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{0}$ при данном приписывании.

П3. $\|\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при данном приписывании, е.т.е. $\|\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1} \mathbin{\dot{\&}} \|\mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при данном приписывании.

П4. $\|\mathbf{A} \vee \mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при данном приписывании, е.т.е. $\|\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1} \mathbin{\dot{\vee}} \|\mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при данном приписывании.

П5. $\|\mathbf{A} \supset \mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при данном приписывании, е.т.е. $\|\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1} \mathbin{\dot{\supset}} \|\mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при данном приписывании.

П6. $\|\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при данном приписывании, е.т.е. $(\|\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1} \mathbin{\dot{\supset}} \|\mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}) \mathbin{\dot{\&}} (\|\mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1} \mathbin{\dot{\supset}} \|\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1})$ при этом приписывании.

П7. $\|\forall\alpha\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании переменным $\beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ объектов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2,..., \mathbf{b}_n$ из **D**, е.т.е. $\dot{\forall}\,\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ ($\|\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании переменным $\alpha, \beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ объектов $\mathbf{d}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2,..., \mathbf{b}_n$).

П8. $\|\exists\alpha\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании переменным $\beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ объектов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2,..., \mathbf{b}_n$ из **D**, е.т.е. $\dot{\exists}\,\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ ($\|\mathbf{A}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании переменным $\alpha, \beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ объектов $\mathbf{d}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2,..., \mathbf{b}_n$).

Формула **B** языка логики предикатов *истинна в модели* $<\mathbf{D}, \varphi>$, е.т.е. $\|\mathbf{B}\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при любом приписывании объектов из **D** свободным переменным, входящим в **B**. Формула **B** *универсально общезначима* ($\mathbf{ЛП} \models \mathbf{B}$), е.т.е. **B** истинна в любой модели.

Докажем индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле **A** следующую лемму:

Лемма 3.
Для любой формулы **A** *силлогистического языка и любой модели* $<\mathbf{D}, \varphi>$ *верно, что* **A** *истинна в* $<\mathbf{D}, \varphi>$, *е.т.е. ее перевод на язык логики предикатов* $\mathbf{A}^*$ *истинен в* $<\mathbf{D}, \varphi>$.

Базис индукции включает четыре случая.

I. $\mathbf{A} = SaP$.

В этом случае $\mathbf{A}^* = \forall x(Sx \supset Px)$. Формула $\forall x(Sx \supset Px)$ истинна в $<\mathbf{D}, \varphi>$, е.т.е. $\|\forall x(Sx \supset Px)\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ (в силу определения истинности в модели и отсутствия в формуле свободных переменных), е.т.е. $\dot{\forall}\,\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ ($\|Sx \supset Px\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании x объекта $\mathbf{d}$) (в силу **П7**), е.т.е. $\dot{\forall}\,\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ ($\|Sx\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании x объекта $\mathbf{d} \mathbin{\dot{\supset}} \|Px\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ при приписывании x объекта $\mathbf{d}$) (**П5**), е.т.е. $\dot{\forall}\,\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ ($\mathbf{d} \in \varphi(S) \mathbin{\dot{\supset}} \mathbf{d} \in \varphi(P)$) (**П1**), е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$ (в силу определения $\subseteq$), е.т.е. $\|SaP\|_{\varphi} = \mathbf{1}$ (в силу **И1**), е.т.е. SaP истинна в $<\mathbf{D}, \varphi>$.

Доказательство случаев **II**. $\mathbf{A} = SiP$, **III**. $\mathbf{A} = SeP$ и **IV**. $\mathbf{A} = SoP$ аналогично, поскольку условия истинности элементарных силлогистических формул и их переводов совпадают.

Индуктивный переход. Пусть **A** есть сложная силлогистическая формула и для всех формул с меньшим, чем у **A**, числом связок утверждение леммы будет справедливым.

V. $\mathbf{A} = \neg\mathbf{B}$.

$\neg\mathbf{B}$ истинна в $<\mathbf{D}, \varphi>$, е.т.е. **B** ложна в $<\mathbf{D}, \varphi>$ (в силу **И5**), е.т.е. $\mathbf{B}^*$ ложна в $<\mathbf{D}, \varphi>$ (по индуктивному допущению), е.т.е. $\neg\mathbf{B}^*$ истинна в $<\mathbf{D}, \varphi>$ (в силу **П2**), е.т.е. $(\neg\mathbf{B})^*$ истинно в $<\mathbf{D}, \varphi>$ (по определению *).

Аналогично рассматриваются случаи, когда **A** графически совпадает с формулами $\mathbf{B} \,\&\, \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ и $\mathbf{B} \supset \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \equiv \mathbf{C}$. **Лемма 3** *доказана*.

Из **Леммы 3** (в силу дистрибутивности квантора общности относительно эквиваленции в метаязыке) следует, что для любой силлогистической формулы **A** верно, что **A** истинна в каждой модели <**D**, φ>, е.т.е. **A*** истинна в каждой модели <**D**, φ>. Отсюда, используя определения **СФ**-общезначимости и универсальной общезначимости, можно получить формулировку **Утверждения 2**:

$$\dot{\forall}\ \mathbf{A}\ (\mathbf{СФ} \vDash \mathbf{A},\ \textit{е.т.е.}\ \mathbf{ЛП} \vDash \mathbf{A}^*).$$

Известно, что исчисление предикатов (**ИП**) является семантически непротиворечивым и полным, т.е. произвольная формула **B** языка логики предикатов универсально общезначима, е.т.е. она является теоремой этого исчисления. Это утверждение, конечно же, верно и для формул, графически равных **A***, где **A** – некоторая формула силлогистического языка. Следовательно, справедливо **Утверждение 3**:

$$\dot{\forall}\ \mathbf{A}\ (\mathbf{ЛП} \vdash \mathbf{A}^*,\ \text{е.т.е.}\ \mathbf{ИП} \vdash \mathbf{A}^*).$$

Итак, показана справедливость **Утверждений 1**, **2** и **3**, позволяющих сделать вывод о том, что операция * погружает систему **СФ** в **ИП**, т.е. что исчисление **СФ** является адекватной формализацией чистого позитивного фрагмента фундаментальной силлогистики – теории, в основе которой лежит стандартная интерпретация категорических высказываний.

§ 2. Позитивная силлогистика Больцано

В настоящем параграфе будет представлена аксиоматическая реконструкция чистого позитивного фрагмента силлогистики Б. Больцано, которая наряду с фундаментальной силлогистикой представляет собой силлогистическую теорию неаристотелевского типа.

Напомним, что, согласно больцановской трактовке, истинные категорические высказывания всех типов должны содержать непустой субъект. Кроме того, для каждого типа высказываний должны выполняться и соответствующие требования лейбницевской трактовки. Такое понимание условий истинности может быть выражено посредством следующего перевода ° элементарных силлогистических формул на язык логики одноместных предикатов:

$SaP^\circ = \forall x\,(Sx \supset Px)\ \&\ \exists xSx$,
$SeP^\circ = \forall x\,(Sx \supset \neg Px)\ \&\ \exists xSx$,
$SiP^\circ = \exists x\,(Sx\ \&\ Px)$,
$SoP^\circ = \exists x\,(Sx\ \&\ \neg Px)$.

Данный перевод, обычным образом распространенный на сложные силлогистические формулы, будем называть *больцановским*.

Чистый позитивный фрагмент силлогистики Больцано – это теория, законами которой являются те и только те силлогистические формулы, больцановские переводы которых доказуемы в исчислении предикатов. Одной из возможных аксиоматизаций данной теории является система **СБ** со следующими схемами аксиом (и единственным правилом вывода – *modus ponens*):

СБ0. Схемы аксиом исчисления высказываний,
СБ1. $(MaP\ \&\ SaM) \supset SaP$,
СБ2. $(MeP\ \&\ SaM) \supset SeP$,
СБ3. $SiP \supset PiS$,
СБ4. $SaP \supset SiP$.
СБ5. $SiP \supset SaS$,
СБ6. $SeP \equiv \neg SiP\ \&\ SiS$,
СБ7. $SoP \equiv \neg SaP\ \&\ SiS$.

В.И. Маркиным в [36] было показано, что система **СБ** адекватно формализует больцановскую интерпретацию категорических высказываний, т.е. что **СБ** погружается в исчисление предикатов посредством перевода °.

Доказательство погружаемости системы **СБ** можно было бы осуществить методом, описанным в предыдущем параграфе применительно к системе **СФ**. Однако мы избираем другой способ доказательства, простота и эффективность которого проявится и в дальнейшем при доказательстве погружаемости других систем силлогистики в исчисление предикатов.

Суть данного метода (на примере **СБ**) состоит в следующем. Первоначально осуществляется погружение **СБ** в систему **СФ**. Причем погружающая операция ψ_1 выбирается таким образом, что ее композиция с операцией *, заданной в предыдущем параграфе, равносильна больцановскому переводу ° силлогистических формул. Утверждение о погружаемости **СБ** в **ИП** посредством этого перевода непосредственно будет следовать из погружаемости **СБ** в **СФ** посредством ψ_1 и доказанной ранее погружаемости **СФ** в **ИП** посредством функции *.

При доказательстве погружаемости одной силлогистической теории в другую будем использовать следующий критерий, предложенный В.А. Смирновым [62]:

Исчисление $\mathbf{S_1}$ *погружается в исчисление* $\mathbf{S_2}$ *посредством функции* ψ_1 *(из множества формул* $\mathbf{S_1}$ *во множество формул* $\mathbf{S_2}$*), е.т.е. (1) для каждой формулы* **A** *языка* $\mathbf{S_1}$ *имеет место:* $\mathbf{S_1} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{S_2} \vdash \psi_1(\mathbf{A})$*, и существует такая функция* ψ_2 *из мно-*

жества формул $\mathbf{S}_2$ *во множество формул* $\mathbf{S}_1$, *что* (2) *для каждой формулы* $\mathbf{A}$ *языка* $\mathbf{S}_2$ *имеет место*: $\mathbf{S}_2 \vdash \mathbf{A} \mathrel{\dot{\supset}} \vdash \psi_1(\mathbf{A})$, *и* (3) *для каждой формулы* $\mathbf{A}$ *языка* $\mathbf{S}_1$ *имеет место*: $\mathbf{S}_1 \vdash \mathbf{A} \equiv \psi_2(\psi_1(\mathbf{A}))$.

Воспользуемся данным критерием применительно к случаю, когда $\mathbf{S}_1$ есть система **СБ**, а $\mathbf{S}_2$ – система **СФ**. Операцию ψ_1 из **СБ** в **СФ** выбираем, как было сказано ранее, с тем расчетом, чтобы ее композиция с функцией * была равносильна больцановской интерпретации силлогистических формул:

$$\psi_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS, \qquad \psi_1(SeP) = SeP \,\&\, SiS,$$
$$\psi_1(SiP) = SiP, \qquad \psi_1(SoP) = SoP,$$
$$\psi_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_1(\mathbf{A}), \qquad \psi_1(\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B}) = \psi_1(\mathbf{A}) \triangledown \psi_1(\mathbf{B}).$$

Приступим к доказательству погружаемости системы **СБ** в **ФС** посредством операции ψ_1.

Метатеорема 3.

$$\dot{\forall}\, \mathbf{A}(\text{СБ} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \text{СФ} \vdash \psi_1(\mathbf{A})).$$

Индукцией по длине доказательства формулы **A** в силлогистике **СБ** покажем, что часть (1) критерия Смирнова выполняется. Продемонстрируем сначала доказуемость в **СФ** ψ_1-переводов всех аксиом системы **СБ**.

СБ0. Переводы аксиом **СБ0** также являются аксиомами исчисления высказываний, а потому они доказуемы в **СФ**.

СБ1. $\psi_1((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP) = (MaP \,\&\, MiM \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset (SaP \,\&\, SiS)$.

1.	$(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$	**СФ1**
2.	$(MaP \,\&\, MiM \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset SaP$	1; **ЛВ**[1]
3.	$(MaP \,\&\, MiM \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset SiS$	тавтология **ЛВ**
4.	$(MaP \,\&\, MiM \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset (SaP \,\&\, SiS)$	2, 3; **ЛВ**

СБ2. $\psi_1((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, MiM \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset (SeP \,\&\, SiS)$.

Доказательство аналогично вышеприведенному (вместо **СФ1** берется **СФ2**).

[1] Отметка **ЛВ** или **ЛП** в анализе доказательств означает, что формула данного шага получена по законам логики высказываний или логики предикатов.

СБ3. $\psi_1(SiP \supset PiS) = SiP \supset PiS$.

1.	$PeS \supset SeP$	**СФ3**
2.	$PeS \equiv \neg PiS$	**СФ7**
3.	$SeP \equiv \neg SiP$	**СФ7**
4.	$SiP \supset PiS$	1, 2, 3; **ЛВ**

СБ4. $\psi_1(SaP \supset SiP) = (SaP \,\&\, SiS) \supset SiP$.

1.	$(PeS \,\&\, SaP) \supset SeS$	**СФ2**
2.	$SeP \supset PeS$	**СФ3**
3.	$SeP \equiv \neg SiP$	**СФ7**
4.	$(\neg SiP \,\&\, SaP) \supset SeS$	1, 2, 3; **ЛВ**
5.	$SeS \equiv \neg SiS$	**СФ7**
6.	$(SaP \,\&\, SiS) \supset SiP$	4, 5; **ЛВ**

СБ5. $\psi_1(SiP \supset SaS) = SiP \supset (SaS \,\&\, SiS)$.

1.	SaS	**СФ4**
2.	$SiP \supset SaS$	1; **ЛВ**
3.	$SiP \supset SiS$	**СФ5**
4.	$SiP \supset (SaS \,\&\, SiS)$	2, 3; **ЛВ**

СБ6. $\psi_1(SeP \equiv \neg SiP \,\&\, SiS) = SeP \,\&\, SiS \equiv \neg SiP \,\&\, SiS$.

1.	$SeP \equiv \neg SiP$	**СФ7**
2.	$SeP \,\&\, SiS \equiv \neg SiP \,\&\, SiS$	1; **ЛВ**

СБ7. $\psi_1(SoP \equiv \neg SaP \,\&\, SiS) = SoP \equiv \neg(SaP \,\&\, SiS) \,\&\, SiS$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP$	**СФ8**
2.	$SoP \supset SiS$	**СФ6**
3.	$SoP \supset \neg(SaP \,\&\, SiS) \,\&\, SiS$	1, 2; **ЛВ**
4.	$(\neg(SaP \,\&\, SiS) \,\&\, SiS) \supset \neg SaP$	тавтология **ЛВ**
5.	$SoP \equiv \neg(SaP \,\&\, SiS) \,\&\, SiS$	1, 3, 4; **ЛВ**

Справедливо также следующее утверждение:

$$(\text{СФ} \vdash \psi_1(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \mathbin{\dot{\&}} \text{СФ} \vdash \psi_1(\mathbf{A})) \mathrel{\dot{\supset}} \text{СФ} \vdash \psi_1(\mathbf{B}).$$

Действительно, $\psi_1(\mathbf{A} \supset \mathbf{B}) = \psi_1(\mathbf{A}) \supset \psi_1(\mathbf{B})$, а правило *modus ponens* имеется в **СФ**. Таким образом, часть (1) критерия Смирнова выполняется.

Для доказательства частей (2) и (3) указанного критерия необходимо сформулировать обратный перевод из системы **СФ** в **СБ**. Для этого определим функцию ψ_2 из **СФ** в **СБ** следующим образом:

$\psi_2(SaP) = SaP \vee \neg SiS$, $\psi_2(SeP) = SeP \vee \neg SiS$,
$\psi_2(SiP) = SiP$, $\psi_2(SoP) = SoP$,
$\psi_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_2(\mathbf{A})$, $\psi_2(\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B}) = \psi_2(\mathbf{A}) \triangledown \psi_2(\mathbf{B})$.

Покажем теперь выполнение части (2) критерия Смирнова:

$$\dot\forall\, \mathbf{A}(\mathbf{СФ} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{СБ} \vdash \psi_2(\mathbf{A})).$$

При этом будем использовать тот же способ доказательства, что и при доказательстве части (1), опуская тривиальные шаги. Главное надо показать, что ψ_2-переводы всех силлогистических аксиом системы **СФ** являются теоремами **СБ**.

СФ1. $\psi_2((MaP \& SaM) \supset SaP) = ((MaP \vee \neg MiM) \& (SaM \vee \neg SiS)) \supset (SaP \vee \neg SiS)$.

1.	$(MaP \& SaM) \supset SaP$	**СБ1**
2.	$SaM \supset SiM$	**СБ4**
3.	$SiM \supset MiS$	**СБ3**
4.	$MiS \supset MaM$	**СБ5**
5.	$MaM \supset MiM$	**СБ4**
6.	$SaM \supset MiM$	2, 3, 4, 5; **ЛВ**
7.	$(\neg MiM \& SaM) \supset (SaP \vee \neg SiS)$	6; **ЛВ**
8.	$((MaP \vee \neg MiM) \& (SaM \vee \neg SiS)) \supset (SaP \vee \neg SiS)$	1, 7; **ЛВ**

СФ2. $\psi_2((MeP \& SaM) \supset SeP) = ((MeP \vee \neg MiM) \& (SaM \vee \neg SiS)) \supset (SeP \vee \neg SiS)$.

Доказательство аналогично предыдущему. Вместо аксиомной схемы **СБ1** нужно взять **СБ2**.

СФ4. $\psi_2(SaS) = SaS \vee \neg SiS$.

1.	$SiS \supset SaS$	**СБ5**
2.	$SaS \vee \neg SiS$	1; **ЛВ**

СФ5. $\psi_2(SiP \supset SiS) = SiP \supset SiS$.

1.	$SiP \supset SaS$	**СБ5**
2.	$SaS \supset SiS$	**СБ4**
3.	$SiP \supset SiS$	1, 2; **ЛВ**

СФ6. $\psi_2(SoP \supset SiS) = SoP \supset SiS$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP \& SiS$	**СБ7**
2.	$SoP \supset SiS$	1; **ЛВ**

СФ7. $\psi_2(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \vee \neg SiS) \equiv \neg SiP$.

1.	$SeP \equiv \neg SiP \& SiS$	**СБ6**
2.	$\neg SiP \supset (SeP \vee \neg SiS)$	1; **ЛВ**
3.	$SeP \supset \neg SiP$	1; **ЛВ**
4.	$SiP \supset SiS$	теорема **СБ** (см. п. **СФ5** док-ва)
5.	$\neg SiS \supset \neg SiP$	4; **ЛВ**
6.	$(SeP \vee \neg SiS) \equiv \neg SiP$	2, 3, 5; **ЛВ**

СФ3. $\psi_2(SeP \supset PeS) = (SeP \vee \neg SiS) \supset (PeS \vee \neg PiP)$.

1.	$PiS \supset SiP$	**СБ3**
2.	$\neg SiP \supset \neg PiS$	1; **ЛВ**
3.	$(SeP \vee \neg SiS) \equiv \neg SiP$	теорема **СБ** (см. п. **СФ7** док-ва)
4.	$(PeS \vee \neg PiP) \equiv \neg PiS$	теорема **СБ** (аналогична п.3)
5.	$(SeP \vee \neg SiS) \supset (PeS \vee \neg PiP)$	2, 3, 4; **ЛВ**

СФ8. $\psi_2(SoP \equiv \neg SaP) = SoP \equiv \neg(SaP \vee \neg SiS)$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP \& SiS$	**СБ7**
2.	$SoP \equiv \neg(SaP \vee \neg SiS)$	1; **ЛВ**

Доказательство части (2) критерия Смирнова *завершено*.

Часть (3) этого критерия – $\dot\forall\, \mathbf{A}(\mathbf{СБ} \vdash \mathbf{A} \equiv \psi_2(\psi_1(\mathbf{A})))$ – доказывается индукцией по числу логических связок в формуле **A**. Базис индукции включает четыре случая.

I. A = SaP.

Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = \psi_2(SaP \& SiS) = (SaP \vee \neg SiS) \& SiS$.

1.	$((SaP \vee \neg SiS) \& SiS) \supset SaP$	тавтология **ЛВ**
2.	$SaP \supset (SaP \vee \neg SiS)$	тавтология **ЛВ**
3.	$SaP \supset SiP$	**СБ4**
4.	$SiP \supset SaS$	**СБ5**
5.	$SaS \supset SiS$	**СБ4**
6.	$SaP \supset SiS$	3, 4, 5; **ЛВ**
7.	$SaP \supset ((SaP \vee \neg SiS) \& SiS)$	2, 6; **ЛВ**
8.	$SaP \equiv ((SaP \vee \neg SiS) \& SiS)$	1, 7; **ЛВ**

II. A = SiP.

Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = SiP$.

1.	$SiP \equiv SiP$	тавтология **ЛВ**

III. $\mathbf{A} = SeP$.

Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = \psi_2(SeP \,\&\, SiS) = (SeP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS)$.

1.	$((SeP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS) \supset SeP$	тавтология **ЛВ**
2.	$SeP \supset (SeP \vee \neg SiS)$	тавтология **ЛВ**
3.	$SeP \equiv \neg SiP \,\&\, SiS$	**СБ6**
4.	$SeP \supset SiS$	3; **ЛВ**
5.	$SeP \supset ((SeP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS)$	2, 4; **ЛВ**
6.	$SeP \equiv ((SeP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS)$	1, 5; **ЛВ**

IV. $\mathbf{A} = SoP$.

Тогда $\psi_2(\psi_1(\mathbf{A})) = SoP$.

1.	$SoP \equiv SoP$	тавтология **ЛВ**

V. $\mathbf{A} = \neg\mathbf{B}$

1.	$\mathbf{B} \equiv \psi_2(\psi_1(\mathbf{B}))$	индуктивное допущение
2.	$\neg\mathbf{B} \equiv \neg\psi_2(\psi_1(\mathbf{B}))$	1; **ЛВ**
3.	$\neg\psi_2(\psi_1(\mathbf{B})) = \psi_2(\psi_1(\neg\mathbf{B}))$	определения ψ_2 и ψ_1
4.	$\neg\mathbf{B} \equiv \psi_2(\psi_1(\neg\mathbf{B}))$	2, 3; **ЛВ**

Остальные шаги индуктивного перехода доказываются в том же духе.

Таким образом, все три части критерия Смирнова выполняются. Следовательно, **СБ** погружается в **ФС** посредством ψ_1.

Теперь мы в состоянии доказать следующее утверждение:

Метатеорема 4.
Система **СБ** *погружается в исчисление предикатов посредством больцановского перевода.*

Согласно **Метатеореме 3**, имеем: $\dot{\forall}$ **A**(**СБ** $\vdash$ **A**, *е.т.е.* **СФ** $\vdash$ $\psi_1(\mathbf{A})$). В предыдущем параграфе была доказана погружаемость **СФ** в исчисление предикатов посредством функции *, откуда следует, что $\dot{\forall}$ **A**(**СФ** $\vdash$ $\psi_1(\mathbf{A})$, е.т.е. **ИП** $\vdash$ $\psi_1(\mathbf{A})^*$). Из двух данных утверждений получаем: $\dot{\forall}$ **A**(**СБ** $\vdash$ **A**, *е.т.е.* **ИП** $\vdash$ $\psi_1(\mathbf{A})^*$), т.е. что **СБ** погружается в исчисление предикатов посредством композиции функций ψ_1 и *.

Остается показать, что данная композиция равносильна больцановскому переводу силлогистических формул. Демонстрируем указанную равносильность сначала для элементарных формул:

$$\psi_1(SaP)^* = (SaP \,\&\, SiS)^* = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists x(Sx \,\&\, Sx) \equiv \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx = SaP^\circ.$$

$$\psi_1(SiP)^* = SiP^* = \exists x(Sx \,\&\, Px) = SiP^\circ.$$

$$\psi_1(SeP)^* = (SeP \,\&\, SiS)^* = \forall x(Sx \supset \neg Px) \,\&\, \exists x(Sx \,\&\, Sx) \equiv \forall x(Sx \supset \neg Px) \,\&\, \exists xSx = SeP^\circ.$$

$$\psi_1(SoP)^* = SoP^* = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) = SoP^\circ.$$

Далее несложно показать эквивалентность в исчислении предикатов композиции ψ_1 и * больцановскому переводу ° относительно формул видов $\neg$**B**, **B** & **C**, **B** $\vee$ **C**, **B** $\supset$ **C** и **B** $\equiv$ **C** исходя из предположения, что $\psi_1(\mathbf{B})^*$ эквивалентна $\mathbf{B}^\circ$ и $\psi_1(\mathbf{C})^*$ эквивалентна $\mathbf{C}^\circ$.

Метатеорема 4 *доказана*.

Следует заметить, что не только система **СБ** погружается в **СФ**, но и наоборот, система **СФ** погружается в **СБ**, причем погружающей функцией в этом случае будет операция ψ_2.

Метатеорема 5.

$\dot{\forall}$ **A**(**СФ** $\vdash$ **A**, е.т.е. **СБ** $\vdash$ $\psi_2(\mathbf{A})$).

Используем в доказательстве **Метатеоремы 5** части (1) и (2) доказательства **Метатеоремы 3**. Несложно также показать, что $\dot{\forall}$ **A**(**СФ** $\vdash$ $\mathbf{A} \equiv \psi_1(\psi_2(\mathbf{A}))$). Таким образом, и в этом случае критерий Смирнова выполняется.

§ 3. Позитивная силлогистика Кэрролла

Кэрролловская трактовка смыслов категорических высказываний отличается от больцановской отсутствием требования непустоты субъекта для истинных общеотрицательных высказываний. Поэтому кэрролловский перевод ' силлогистических формул на язык логики предикатов определяется следующим образом:

$$SaP' = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx, \qquad SeP' = \forall x(Sx \supset \neg Px),$$
$$SiP' = \exists x(Sx \,\&\, Px), \qquad SoP' = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px),$$
$$(\neg\mathbf{A})' = \neg(\mathbf{A}'), \qquad (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \nabla \mathbf{B}'.$$

Теория чистой позитивной силлогистики, законами которой являются формулы, кэрролловские переводы которых доказуемы в исчислении предикатов, аксиоматизируется посредством системы **СК**, предложенной В.И. Маркиным [36]. Она получается из системы **СБ** заменой схемы аксиом **СБ6** на схему

СК6. $SeP \equiv \neg SiP$;

схемы **СК0-СК5**, **СК7** совпадают, соответственно, с **СБ0-СБ5**, **СБ7**.

Приведем доказательство погружаемости силлогистики **СК** в **СФ**. С этой целью определяем функцию η_1 из **СК** в **СФ** таким образом, чтобы композиция η_1 и * была равносильна кэрролловскому переводу ′ силлогистических формул:

$\eta_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS$, $\quad \eta_1(SeP) = SeP$,
$\eta_1(SiP) = SiP$, $\quad \eta_1(SoP) = SoP$,
$\eta_1(\neg \mathbf{A}) = \neg \eta_1(\mathbf{A})$, $\quad \eta_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \eta_1(\mathbf{A}) \nabla \eta_1(\mathbf{B})$.

Метатеорема 6.

η_1 *погружает* **СК** в **СФ**, *т.е.*
$\forall \mathbf{A}$(**СК** $\vdash \mathbf{A}$, е.т.е. **СФ** $\vdash \eta_1(\mathbf{A})$).

Покажем прежде всего, что η_1-переводы всех теорем системы **СК** доказуемы в **СФ**. Доказательство η_1-переводов аксиом **СК1**, **СК3**, **СК4**, **СК5**, **СК7** осуществлено в пунктах **СБ1**, **СБ3**, **СБ4**, **СБ5**, **СБ7** доказательства **Метатеоремы 1** из предыдущего параграфа. Остается продемонстрировать доказуемость в фундаментальной силлогистике η_1-переводов аксиом **СК2** и **СК6**.

СК2. $\eta_1((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset SeP$.

1.	$(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$	**СФ2**
2.	$(MeP \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset SeP$	1; **ЛВ**

СК6. $\eta_1(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \equiv \neg SiP)$.

1.	$SeP \equiv \neg SiP$	аксиомная схема **СФ7**

Рассмотрим следующую функцию η_2 из **СФ** в **СК**:

$\eta_2(SaP) = SaP \vee \neg SiS$, $\quad \eta_2(SeP) = SeP$,
$\eta_2(SiP) = SiP$, $\quad \eta_2(SoP) = SoP$,
$\eta_2(\neg \mathbf{A}) = \neg \eta_2(\mathbf{A})$, $\quad \eta_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \eta_2(\mathbf{A}) \nabla \eta_2(\mathbf{B})$.

Покажем, что η_2-переводы всех теорем системы **СФ** доказуемы в **СК**. Доказательства η_2-переводов **СФ1**, **СФ4**, **СФ5**, **СФ6**, **СФ8** в системе **СК** такие же, как и в **СБ**; они осуществлены в соответствующих пунктах доказательства **Метатеоремы 3**. Продемонстрируем доказуемость в **СК** η_2-переводов схем аксиом **СФ2**, **СФ3** и **СФ7**.

СФ2. $\eta_2((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = ((MeP \,\&\, (SaM \vee \neg SiS)) \supset SeP)$.

1.	$MeP \,\&\, (SaM \vee \neg SiS) \equiv (MeP \,\&\, SaM) \vee (MeP \,\&\, \neg SiS)$	тавтология **ЛВ**
2.	$(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$	**СК2**
3.	$SiP \supset SaS$	**СК5**
4.	$SaS \supset SiS$	**СК4**
5.	$\neg SiS \supset \neg SiP$	3, 4; **ЛВ**
6.	$SeP \equiv \neg SiP$	**СК6**
7.	$(MeP \,\&\, \neg SiS) \supset SeP$	5, 6; **ЛВ**
8.	$(MeP \,\&\, (SaM \vee \neg SiS)) \supset SeP$	1, 2, 7; **ЛВ**

Ф3. $\eta_2(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$.

1.	$PiS \supset SiP$	**СК3**
2.	$\neg SiP \supset \neg PiS$	1; **ЛВ**
3.	$SeP \equiv \neg SiP$	**СК6**
4.	$PeS \equiv \neg PiS$	**СК6**
5.	$SeP \supset PeS$	2, 3, 4; **ЛВ**

Ф7. $\eta_2(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \equiv \neg SiP)$

1.	$SeP \equiv \neg SiP$	**СК6**

Индукцией по числу логических связок можно показать, что $\forall \mathbf{A}$ (**СК** $\vdash \mathbf{A} \blacksquare \eta_2(\eta_1(\mathbf{A}))$). Когда $\mathbf{A} = SaP$, требуется найти доказательство в **СК** формулы $SaP \blacksquare (SaP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS$. Оно представлено в доказательстве части (3) критерия Смирнова предыдущего параграфа. Когда **А** является элементарной формулой другого типа, она графически совпадает с $\eta_2(\eta_1(\mathbf{A}))$. Индуктивный переход обосновывается так же, как и в **Метатеореме 3**.

Таким образом, все три части критерия Смирнова выполняются, что свидетельствует о погружаемости **СК** в **СФ** посредством η_1-перевода. Но так как композиция η_1 и * равносильна кэрролловскому переводу силлогистических формул, то из **Метатеоремы 6** и погружаемости **СФ** в **ИП** посредством * выводится следующее утверждение:

Метатеорема 7.
Система **СК** *погружается в исчисление предикатов посредством кэрролловского перевода*.

Отметим, что функция η_2, определенная в процессе доказательства **Метатеоремы 6**, является операцией, погружающей фундаментальную силлогистику **СФ** в систему **СК**:

Метатеорема 8.

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{СФ} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{СК} \vdash \eta_2(\mathbf{A})).$$

Легко доказать, что $\forall \mathbf{A}(\mathbf{СФ} \vdash \mathbf{A}$ ■ $\eta_1(\eta_2(\mathbf{A})))$, а справедливость первых двух частей критерия Смирнова показана при доказательстве **Метатеоремы 6**.

§ 4. Чистые позитивные силлогистики аристотелевского типа

В предыдущих параграфах исследовались различные силлогистические теории, которые можно было бы назвать силлогистиками неаристотелевского типа, поскольку в них не являются законами некоторые силлогистические утверждения, принимавшиеся Аристотелем. Так, например, в силлогистике Больцано неправомерен закон обращения $SeP \supset PeS$, а в силлогистике Кэрролла – закон подчинения $SeP \supset SoP$. Относительно таких неаристотелевских силлогистик, как фундаментальная, больцановская и кэрролловская, решались проблемы поиска аксиоматических систем, адекватно формализующих силлогистические рассуждения при соответствующих содержательных трактовках смыслов категорических высказываний.

В данном параграфе мы рассмотрим некоторые системы чистой позитивной силлогистики *аристотелевского типа* – аксиоматические исчисления, теоремами которых являются все законы логического квадрата, все принципы обращения, а также все 24 правильных модуса простого категорического силлогизма. Проблема, которая будет здесь решаться, является в некотором отношении обратной той, которая решалась ранее. Ее суть состоит в том, чтобы для каждой системы чистой позитивной силлогистики подыскать адекватную ей интерпретацию категорических высказываний. В более точных терминах эту проблему можно сформулировать как проблему поиска функции, погружающей силлогистическое исчисление в исчисление предикатов.

***Система* C2**

Исследование силлогистик аристотелевского типа начнем с аксиоматической системы **C2**, детально исследованной В.А. Смирновым. Напомним, что схемами аксиом **C2** являются:

A0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

A1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$,

A2. $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$,

A3. $SeP \supset PeS$,

A4. $SaP \supset SiP$,

A5. $SiP \supset SaS$,

A6. $SeP \equiv \neg SiP$,

A7. $SoP \equiv \neg SaP$.

Единственное правило вывода в **C2** – *modus ponens*.

Нетрудно заменить, что система **СК**, формализующая позитивный фрагмент силлогистики Кэрролла, получается из **C2** заменой схемы **A7** на $SoP \equiv \neg SaP \,\&\, SiS$. Если же помимо этого заменить **A6** на $SeP \equiv \neg SiP \,\&\, SiS$ и вместо принципа *e*-обращения **A3** принять принцип *i*-обращения, то мы получим систему **СБ**, формализующую позитивный фрагмент силлогистики Больцано. Никакая из систем **C2**, **СК** и **СБ** не является подсистемой другой.

Интерпретация **C2** в исчислении предикатов была предложена В.А. Смирновым:

$$SaP^{\wedge} = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx,$$
$$SiP^{\wedge} = \exists x(Sx \,\&\, Px),$$
$$SeP^{\wedge} = \forall x(Sx \supset \neg Px),$$
$$SoP^{\wedge} = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx.$$

Данный перевод, распространенный обычным образом на сложные формулы, назовем *оккамовским*, поскольку он удовлетворяет требованиям У. Оккама о непустоте субъектов истинных утвердительных и ложных отрицательных высказываний.

Эта трактовка высказываний адекватна системе **C2** в случае, если **C2** погружается в исчисление предикатов посредством оккамовского перевода. Доказательство данного утверждения впервые получено В.А. Смирновым [61]. Здесь мы применим иной метод, который был предложен В.И. Маркиным [36] и использован в двух предыдущих параграфах. Осуществим сначала погружение **C2** в фундаментальную силлогистику. Зададим функцию χ_1 из **C2** в **СФ** следующим образом:

$$\chi_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS, \qquad \chi_1(SeP) = SeP,$$
$$\chi_1(SiP) = SiP, \qquad \chi_1(SoP) = SoP \vee \neg SiS,$$
$$\chi_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi_1(\mathbf{A}), \qquad \chi_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \chi_1(\mathbf{A}) \nabla \chi_1(\mathbf{B}).$$

Метатеорема 9.

χ_1 *погружает* **C2** *в* **СФ**, *т.е.* $\forall \mathbf{A}$ (**C2** $\vdash \mathbf{A}$, е.т.е. **СФ** $\vdash \chi_1(\mathbf{A})$).

Первая часть доказательства сводится к демонстрации того факта, что χ_1-переводы всех аксиом **C2** доказуемы в **СФ**.

A1. $\chi_1((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP) = (MaP \,\&\, MiM \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset (SaP \,\&\, SiS)$.

Доказательство этой формулы приведено ранее в пункте **СБ1 Метатеоремы 3**.

А2. $\chi_1((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, SaM \,\&\, SiS) \supset SeP$.

Доказательство приведено в пункте **СК2 Метатеоремы 6**.

А3. $\chi_1(SeP \supset PeS) = (SeP \supset PeS)$ – аксиома **СФ3**.

А4. $\chi_1(SaP \supset SiP) = (SaP \,\&\, SiS) \supset SiP$.

Доказательство приведено в пункте **СБ4 Метатеоремы 3**.

А5. $\chi_1(SiP \supset SaS) = SiP \supset (SaS \,\&\, SiS)$.

Доказательство приведено в пункте **СБ5 Метатеоремы 3**.

А6. $\chi_1(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \equiv \neg SiP)$ – аксиома **СФ7**.

А7. $\chi_1(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \vee \neg SiS) \equiv \neg(SaP \,\&\, SiS)$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP$	**СФ8**
2.	$SoP \vee \neg SiS \equiv \neg SaP \vee \neg SiS$	1; **ЛВ**
3.	$\neg SaP \vee \neg SiS \equiv \neg(SaP \,\&\, SiS)$	тавтология **ЛВ**
4.	$SoP \vee \neg SiS \equiv \neg(SaP \,\&\, SiS)$	2, 3; **ЛВ**

Далее рассмотрим функцию χ_2 из **СФ** в систему **С2**:

$\chi_2(SaP) = SaP \vee \neg SiS$, $\quad \chi_2(SeP) = SeP$,
$\chi_2(SiP) = SiP$, $\quad \chi_2(SoP) = SoP \,\&\, SiS$,
$\chi_2(\neg \mathbf{A}) = \neg\chi_2(\mathbf{A})$, $\quad \chi_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \chi_2(\mathbf{A}) \nabla \chi_2(\mathbf{B})$.

Докажем, что χ_2-переводы всех теорем **СФ** доказуемы в **С2**. Для этого продемонстрируем доказуемость переводов аксиом **СФ1**-**СФ8** фундаментальной силлогистики **СФ**.

СФ1. $\chi_2((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP) = ((MaP \vee \neg MiM) \,\&\, (SaM \vee \neg SiS)) \supset (SaP \vee \neg SiS)$.

Доказательство этой формулы в **С2** аналогично ее доказательству в **СБ** (см. пункт **СФ1 Метатеоремы 3**). Отличие состоит лишь в том, что формула третьего шага **СБ**-доказательства $SiM \supset MiS$ не является аксиомой **С2**, но доказуема в ней с помощью **А3** и **А6**.

СФ2. $\chi_2((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, (SaM \vee \neg SiS)) \supset SeP$.

Доказательство такое же, как в системе **СБ** (см. пункт **СФ2 Метатеоремы 3**).

СФ3. $\chi_2(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$ – аксиома **А3** системы **С2**.
СФ4. $\chi_2(SaS) = SaS \vee \neg SiS$.

СФ5. $\chi_2(SiP \supset SiS) = SiP \supset SiS$.

Доказательства такие же, как в системе **СБ** (см. пункты **СФ4** и **СФ5 Метатеоремы 3**).

СФ6. $\chi_2(SoP \supset SiS) = (SoP \,\&\, SiS) \supset SiS$ – тавтология.
СФ7. $\chi_2(SeP \equiv \neg SiP) = (SeP \equiv \neg SiP)$ – аксиома **А6** в **С2**.
СФ8. $\chi_2(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \,\&\, SiS) \equiv \neg(SaP \vee \neg SiS)$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP$	**А7**
2.	$(SoP \,\&\, SiS) \equiv \neg SaP \,\&\, SiS$	1; **ЛВ**
3.	$\neg SaP \,\&\, SiS \equiv \neg(SaP \vee \neg SiS)$	тавтология **ЛВ**
4.	$(SoP \,\&\, SiS) \equiv \neg(SaP \vee \neg SiS)$	2, 3; **ЛВ**

В заключительной части доказательства необходимо показать, что **С2** $\vdash$ $\mathbf{A} \equiv \chi_2(\chi_1(\mathbf{A}))$ для произвольной формулы **А**. В случаях, когда **А** $\rightleftharpoons SiP$ и **А** $\rightleftharpoons SeP$, левая и правая части эквиваленции графически совпадают. Доказательства в **С2** формулы $SaP \equiv (SaP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS$ такое же, как и в **СБ** (см. часть (3) **Метатеоремы 3**). В случае, когда **А** $\rightleftharpoons SoP$, необходимо доказать в **С2** формулу $SoP \equiv (SoP \,\&\, SiS) \vee \neg SiS$:

1.	$SoP \equiv \neg SaP$	**А6**
2.	$SaP \equiv (SaP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS$	теорема **С2**
3.	$\neg SaP \equiv (\neg SaP \,\&\, SiS) \vee \neg SiS$	2; **ЛВ**
4.	$SoP \equiv (SoP \,\&\, SiS) \vee \neg SiS$	1, 3; **ЛВ**

Метатеорема 9 о погружаемости исчисления **С2** в силлогистику **СФ** посредством χ_2 *доказана*.

Теперь несложно убедиться в том, что композиция переводов χ_2 и * равносильна оккамовскому переводу силлогистических формул. Следовательно, в силу **Метатеоремы 9** и погружаемости **СФ** в **ИП**, справедливо следующее утверждение:

Метатеорема 10.
С2 *погружается в исчисление предикатов посредством оккамовского перевода*.

Легко видеть, что $\dot{\forall}$ **А** (**СФ** $\vdash$ $\mathbf{A} \equiv \chi_1(\chi_2(\mathbf{A}))$). Используя также две первые части доказательства **Метатеоремы 9**, можно обосновать следующее утверждение:

Метатеорема 11.
χ_2 *погружает* **СФ** *в* **С2**.

***Система* C4**

Перйдем далее к исследованию силлогистического исчисления **C4** В.А. Смирнова, которое эквивалентно известной системе Я. Лукасевича, формализующей чистый позитивный фрагмент *традиционной силлогистики*. Напомним, что система **C4** получается из **C2** за счет присоединения к ней новой схемы аксиом:

A8. SiS.

В Главе I приводились интерпретации силлогистических формул в языке логики предикатов, которые выражают возможные смыслы категорических высказываний, неявно задаваемые аксиомными схемами системы **C4**. Рассмотрим одну из таких интерпретаций – перевод В.А. Бочарова [4]. Он отличается от оккамовского тем, что к переводам утвердительных высказываний дизъюнктивно добавляется формула $\forall x(Sx \equiv Px)$, а к переводам отрицательных – конъюнктивно добавляется член $\neg\forall x(Sx \equiv Px)$. Средствами исчисления предикатов нетрудно установить, что перевод Бочарова равносилен следующему:

$SaP^+ = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, (\exists xSx \vee \neg\exists xPx)$,
$SeP^+ = \forall x(Sx \supset \neg Px) \,\&\, (\exists xSx \vee \exists xPx)$,
$SiP^+ = \exists x(Sx \,\&\, Px) \vee (\neg\exists xSx \,\&\, \neg\exists xPx)$,
$SoP^+ = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee (\neg\exists xSx \,\&\, \exists xPx)$.

Данный перевод, во-первых, менее громоздок, и во-вторых, позволяет явно установить, какие требования относительно пустоты или непустоты терминов категорических высказываний могут подразумеваться в системе **C4**. Эти требования таковы: в истинных утвердительных и ложных отрицательных высказываниях либо оба термина непусты, либо оба они являются пустыми.

Ранее излагавшимся способом В.И. Маркин [36] доказал погружаемость **C4** в исчисление предикатов посредством перевода Бочарова, доопределенного стандартным образом до сложных формул. Сначала задается операция τ_1 из силлогистики **C4** в **СФ**:

$\tau_1(SaP) = SaP \,\&\, (SiS \vee \neg PiP)$,	$\tau_1(SeP) = SeP \,\&\, (SiS \vee PiP)$,
$\tau_1(SiP) = SiP \vee (\neg SiS \,\&\, \neg PiP)$,	$\tau_1(SoP) = SoP \vee (\neg SiS \,\&\, PiP)$,
$\tau_1(\neg \mathbf{A}) = \neg\tau_1(\mathbf{A})$,	$\tau_1(\mathbf{A} \mathbin{\bar\nabla} \mathbf{B}) = \tau_1(\mathbf{A}) \mathbin{\bar\nabla} \tau_1(\mathbf{B})$.

Метатеорема 12.

τ_1 *погружает* **C4** *в* **СФ**.

Продемонстрируем доказуемость в **СФ** τ_1-переводов аксиом **C4**.

A1. $\tau_1((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP) = (MaP \,\&\, (MiM \vee \neg PiP) \,\&\, SaM \,\&\, (SiS \vee \neg MiM)) \supset (SaP \,\&\, (SiS \vee \neg PiP))$.

1.	$(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$	**СФ1**
2.	$((MiM \vee \neg PiP) \,\&\, (SiS \vee \neg MiM)) \supset (SiS \vee \neg PiP)$	тавтология **ЛВ**
3.	$(MaP \,\&\, (MiM \vee \neg PiP) \,\&\, SaM \,\&\, (SiS \vee \neg MiM)) \supset (SaP \,\&\, (SiS \vee \neg PiP))$	1, 2; **ЛВ**

A2. $\tau_1((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, (MiM \vee PiP) \,\&\, SaM \,\&\, (SiS \vee \neg MiM)) \supset (SeP \,\&\, (SiS \vee PiP))$.

Доказательство аналогично приведенному выше, только вместо **СФ1** берется **СФ2**.

A3. $\tau_1(SeP \supset PeS) = (SeP \,\&\, (SiS \vee PiP)) \supset (PeS \,\&\, (PiP \vee SiS))$.

Выводится из **СФ3** по законам **ЛВ.**

A4. $\tau_1(SaP \supset SiP) = (SaP \,\&\, (SiS \vee \neg PiP)) \supset (SiP \vee (\neg SiS \,\&\, \neg PiP))$.

1.	$(SaP \,\&\, SiS) \supset SiP$	теорема **СФ (СБ4 Метатеорема 3)**
2.	$SiP \supset PiS$	теорема **СФ (СБ3 Метатеорема 3)**
3.	$PiS \supset PiP$	**СФ5**
4.	$(SaP \,\&\, SiS) \supset PiP$	1, 2, 3; **ЛВ**
5.	$(SaP \,\&\, \neg PiP) \supset (\neg SiS \,\&\, \neg PiP)$	4; **ЛВ**
6.	$(SaP \,\&\, (SiS \vee \neg PiP)) \supset (SiP \vee (\neg SiS \,\&\, \neg PiP))$	1, 5; **ЛВ**

A5. $\tau_1(SiP \supset SaS) = (SiP \vee (\neg SiS \,\&\, \neg PiP)) \supset (SaS \,\&\, (SiS \vee \neg SiS))$.

Выводится из **СФ4** по законам логики высказываний.

Переводы **A6** и **A7** выводятся, соответственно, из **СФ7** и **СФ8** по законам **ЛВ**.

A8. $\tau_1(SiS) = SiS \vee (\neg SiS \,\&\, \neg SiS)$ – тавтология **ЛВ**.

Зададим обратную операцию τ_2 из **СФ** в **C4** следующим образом: τ_2 сопоставляет каждой силлогистической формуле саму эту формулу. Продемонстрируем, что τ_2-переводы всех теорем **СФ** доказуемы в **C4**, т.е. что система **СФ** является подсистемой **C4**.

Аксиомные схемы **СФ1**, **СФ2**, **СФ3**, **СФ7** и **СФ8** системы **СФ** являются аксиомными схемами **C4**. Аксиомные схемы **СФ5** и **СФ6** выводимы из **A8** по законам логики высказываний. Доказательство **СФ4** в **C4** таково:

1. $SiS \supset SaS$ **A5**
2. SiS **A8**
3. SaS 1, 2; **ЛВ**

Остается показать, что **C4** $\vdash$ **A** $\equiv \tau_2(\tau_1(\mathbf{A}))$ для любой формулы **A**. Для случая, когда **A** = *SaP* или **A** = *SiP*, соответствующие эквиваленции $SaP \equiv SaP \,\&\, (SiS \vee \neg PiP)$ и $SiP \equiv SiP \vee (\neg SiS \,\&\, \neg PiP)$ выводятся из **A8** по законам логики высказываний. Случаи, когда **A** = *SeP* или **A** = *SoP*, сводятся к только что рассмотренным. В случае, когда **A** – сложная формула, доказательство тривиально. Тем самым **Метатеорема 12** о погружаемости **C4** в **СФ** *доказана*.

Учитывая, что композиция функций τ_2 и * равносильна переводу Бочарова $^+$, из **Метатеоремы 12** и погружаемости **СФ** в **ИП** посредством * получаем следующее утверждение:

Метатеорема 13.
Система **C4** *погружается в исчисление предикатов посредством перевода Бочарова.*

Отметим, что перевод τ_2 из **СФ** в **C4** не является погружающей операцией, поскольку в **СФ** недоказуема формула $SaP \equiv SaP \,\&\, (SiS \vee \neg PiP)$, т.е. $SaP \equiv \tau_1(\tau_2(SaP))$. По-видимому, вообще не существует операции, погружающей **СФ** в **C4**. Этот факт отличает **C4** от всех рассмотренных в данной главе исчислений, взаимопогружаемых относительно системы фундаментальной силлогистики **СФ**.

Имеется другой перевод (назовем его Θ) из системы **C4** в классическое исчисление предикатов. Он определяется с использованием фундаментального перевода *:

$$\Theta(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x S_n x) \supset \mathbf{A}^*,$$

где **A** – произвольная формула языка чистой позитивной силлогистики, а $S_1,\ldots, S_n$ – список всех терминов (универсалий) в составе **A**.

Е. Слупецкий [84] в 1955 г. без детального доказательства, а затем М.Н. Бежанишвили и Л.И. Мчедлишвили [3] в 1985 г. (уже с доказательством) продемонстрировали, что Θ есть операция, погружающая **C4** в исчисление предикатов. Докажем справедливость этого утверждения, опираясь на методы, используемые в данной работе.

Задача состоит в нахождении такого перевода, что он погружал бы **C4** в **СФ**, причем его композиция с * была бы равносильна переводу Θ.

Зададим на множестве силлогистических формул операцию ω_1:

$$\omega_1(\mathbf{A}) = (S_1 i S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n) \supset \mathbf{A},$$

где $S_1,\ldots, S_n$ – список всех универсалий, содержащихся в формуле **A**.

Метатеорема 14.
ω_1 *погружает* **C4** *в* **СФ**.

Покажем сначала, что ω_1-переводы всех теорем **C4** доказуемы в системе **СФ**.

Пусть **A** – произвольная теорема **C4**, а последовательность формул $\mathbf{C}_1,\ldots, \mathbf{C}_k$ – ее доказательство в этой системе. Методом возвратной индукции докажем, что ω_1-перевод любой формулы данной последовательности является теоремой **СФ**.

Рассмотрим произвольную формулу $\mathbf{C}_i$, входящую в состав доказательства **A**. Допустим, что ω_1-переводы всех формул доказательства, предшествовавших $\mathbf{C}_i$, являются теоремами **СФ**. Покажем, что это утверждение справедливо и для $\mathbf{C}_i$.

Согласно определению доказательства в **C4**, $\mathbf{C}_i$ может быть либо одной из аксиом этой системы, либо получена из предыдущих формул данной последовательности – $\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}_j$ – по правилу *modus ponens*.

Если $\mathbf{C}_i$ является одной из следующих аксиом **C4**: **A0**, **A1**, **A2**, **A3**, **A6** или **A7**, то поскольку эти формулы относятся также к числу аксиом **СФ**, доказательство $\omega_1(\mathbf{C}_i)$ в **СФ** выглядит следующим образом:

1. $\mathbf{C}_i$ аксиома
2. $(S_1 i S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n) \supset \mathbf{C}_i$ 1; **ЛВ**,

где $S_1,\ldots, S_n$ – список всех терминов в составе $\mathbf{C}_i$.

A4. $\omega_1(SaP \supset SiP) = (SiS \,\&\, PiP) \supset (SaP \supset SiP)$

1. $(SaP \,\&\, SiS) \supset SiP$ теорема **СФ** (**СБ4 Метатеорема 3**)
2. $(SiS \,\&\, PiP) \supset (SaP \supset SiP)$ 1; **ЛВ**

A5. $\omega_1(SiP \supset SaS) = (SiS \,\&\, PiP) \supset (SiP \supset SaS)$

Выводится из **СФ4** (*SaS*) по законам **ЛВ**.

A8. $\omega_1(SiS) = (SiS \supset SiS)$ – тавтология **ЛВ**

Случай, когда $\mathbf{C}_i$ – аксиома, рассмотрен. Перейдем к случаю, когда $\mathbf{C}_i$ получено из $\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}_j$.

Пусть $M_1,\ldots, M_r$ – список универсалий, входящих в $\mathbf{C}_j$, но не входящих в $\mathbf{C}_i$; $P_1,\ldots, P_m$ – список универсалий, входящих и в $\mathbf{C}_j$, и в $\mathbf{C}_i$, а

$Q_1,\dots, Q_n$ – список универсалий, не входящих в $\mathbf{C}_j$, но входящих в $\mathbf{C}_i$. Ясно, что по отдельности каждый из трех списков может, в принципе, оказаться пустым, но, по крайней мере, один – первый или второй, а также второй или третий – обязательно непуст.

Обозначим через $\mathbf{K}_M$ формулу $M_1 i M_1$ & ... & $M_r i M_r$, через $\mathbf{K}_P$ – формулу $P_1 i P_1$ & ... & $P_m i P_m$, и через $\mathbf{K}_Q$ – формулу $Q_1 i Q_1$ & ... & $Q_n i Q_n$.

Очевидно, что $\omega_1(\mathbf{C}_j) = (\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P) \supset \mathbf{C}_j$, $\omega_1(\mathbf{C}_i) = (\mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset \mathbf{C}_i$, а $\omega_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$.

Согласно индуктивному допущению, первая и третья формулы доказуемы в **СФ**. Покажем, что в таком случае теоремой **СФ** будет и вторая формула.

Из доказуемости $(\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P) \supset \mathbf{C}_j$ и $(\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$ в силу законов логики высказываний вытекает доказуемость в **СФ** формулы $\mathbf{K}_M \supset ((\mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset \mathbf{C}_i)$, т.е. $\mathbf{K}_M \supset \omega_1(\mathbf{C}_i)$.

Если список $M_1,\dots, M_r$ пуст, то последнее выражение есть просто $\omega_1(\mathbf{C}_i)$, и мы уже получили утверждение о доказуемости ω_1-перевода $\mathbf{C}_i$.

В случае непустоты указанного списка продолжим рассуждение методом «от противного».

Допустим, что $\omega_1(\mathbf{C}_i)$ недоказуема в **СФ**. В силу семантической полноты **СФ**, данная формула не является **СФ**-общезначимой, т.е. существует модель <**D**, φ>, в которой она принимает значение **0**.

Рассмотрим модель <**D**, φ'>, где φ' всем терминам, отличным от $M_1,\dots, M_r$, приписывает те же самые значения, что и φ, а универсалиям из списка $M_1,\dots, M_r$ сопоставляет в качестве значений множество **D**: $\varphi'(M_1) = \varphi'(M_2) = \dots = \varphi'(M_r) = \mathbf{D}$.

В модели <**D**, φ'> каждая из формул $M_1 i M_1,\dots, M_r i M_r$ примет значение **1** в силу того, что множество **D** непусто. Поэтому и конъюнкция этих формул $\mathbf{K}_M$ истинна в рассматриваемой модели. Что же касается формулы $\omega_1(\mathbf{C}_i)$, то поскольку она не содержит терминов $M_1,\dots, M_r$, значение ее в <**D**, φ'> останется тем же самым, что и в модели <**D**, φ>, т.е. она в обеих моделях принимает значение **0**.

Из сказанного следует, что формула $\mathbf{K}_M \supset \omega_1(\mathbf{C}_i)$ ложна в <**D**, φ'>, и потому она не является **СФ**-общезначимой. Отсюда в силу семантической непротиворечивости **СФ** получаем, что $\mathbf{K}_M \supset \omega_1(\mathbf{C}_i)$ недоказуема в **СФ**, что противоречит выведенному ранее из индуктивного предположения следствию.

Поэтому допущение о недоказуемости $\omega_1(\mathbf{C}_i)$ неверно. Следовательно, эта формула является теоремой **СФ**.

Итак, мы показали, что ω_1-переводы каждой из формул, входящих в состав доказательства $(\mathbf{C}_1,\dots, \mathbf{C}_k)$ произвольной теоремы **A** системы **C4**, доказуемы в **СФ**. И поскольку $\mathbf{C}_k$ есть **A**, то **СФ** ⊢ $\omega_1(\mathbf{A})$. Таким образом, доказано:

$$\dot\forall\, \mathbf{A}\ (\mathbf{C4} \vdash \mathbf{A}\ \dot\supset\ \mathbf{ФС} \vdash \omega_1(\mathbf{A})).$$

Рассмотрим обратный перевод ω_2 из **СФ** в **C4**: $\omega_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. Поскольку **СФ** является подсистемой **C4**, имеем:

$$\dot\forall\, \mathbf{A}\ (\mathbf{СФ} \vdash \mathbf{A}\ \dot\supset\ \mathbf{C4} \vdash \omega_2(\mathbf{A})).$$

Остается показать, что для произвольной силлогистической формулы **A** является верным утверждение:

$$\mathbf{C4} \vdash \mathbf{A} \equiv \omega_2(\omega_1(\mathbf{A})).$$

Поскольку $\omega_2(\omega_1(\mathbf{A})) = \omega_1(\mathbf{A}) = (S_1 i S_1$ & ... & $S_n i S_n) \supset \mathbf{A}$, нам необходимо доказать в **C4** теорему $\mathbf{A} \equiv ((S_1 i S_1$ & ... & $S_n i S_n) \supset \mathbf{A})$:

1.	$\mathbf{A} \supset ((S_1 i S_1$ & ... & $S_n i S_n) \supset \mathbf{A})$	**A0**
2.	$S_1 i S_1$ & ... & $S_n i S_n$	из **A8**; **ЛВ**
3.	$((S_1 i S_1$ & ... & $S_n i S_n) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{A}$	2; **ЛВ**
4.	$\mathbf{A} \equiv ((S_1 i S_1$ & ... & $S_n i S_n) \supset \mathbf{A})$	1, 3; **ЛВ**

Метатеорема 14 о погружаемости исчисления **C4** в **СФ** посредством ω_1-перевода *доказана*.

Метатеорема 15.
Система **C4** *погружается в исчисление предикатов посредством перевода* Θ.

Согласно **Метатеореме 14**, перевод ω_1 погружает **C4** в **СФ**. Сама же система **СФ** погружается в исчисление предикатов посредством функции *. Из этих двух утверждений следует, что композиция переводов ω_1 и * погружает **C4** в **ИП**:

$$\dot\forall\, \mathbf{A}\ (\mathbf{СФ} \vdash \mathbf{A}, \text{е.т.е. } \mathbf{ИП} \vdash \omega_1(\mathbf{A})^*).$$

Остается показать, что композиция переводов ω_1 и * равносильна переводу Θ:

$\omega_1(\mathbf{A})^* = ((S_1 i S_1$ & ... & $S_n i S_n) \supset \mathbf{A})^* = (S_1 i S_1$ & ... & $S_n i S_n)^* \supset \mathbf{A}^* = (\exists x(S_1 x \,\&\, S_1 x)$ & ... & $\exists x(S_n x \,\&\, S_n x)) \supset \mathbf{A}^* \equiv (\exists x S_1 x$ & ... & $\exists x S_n x) \supset \mathbf{A}^* = \Theta(\mathbf{A})$.

Глава IV

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЗИТИВНЫЕ СИЛЛОГИСТИКИ

§ 1. Понятие обобщенной силлогистики

Силлогистические теории, как правило, строятся в языке, содержащем четыре силлогистические константы: ***a***, ***i***, ***e*** и ***o***. Их обычно трактуют как знаки отношений между терминами по объему, а саму силлогистику определяют как теорию правильных рассуждений, основанную на объемных отношениях в сфере общих терминов – субъектов и предикатов категорических высказываний. Так, константа ***a*** может рассматриваться в качестве аналога отношения включения объема субъекта в объем предиката, константа ***i*** как аналог отношения совместимости терминов высказывания по объему, константа ***e*** представляет отношение несовместимости, а ***o*** – отношение невключения.

Однако если отношения между множествами устанавливаются в рамках фиксированного универсума **D**, то наряду с включением, совместимостью, невключением и несовместимостью можно выделить еще два фундаментальных объемных отношения – *отношения исчерпывания* и *неисчерпывания*.

Объемы субъекта и предиката высказывания находятся в отношении исчерпывания, если и только если их объединение совпадает с универсумом **D**; в противном случае, они находятся в отношении неисчерпывания.

В стандартном силлогистическом языке нет констант, которые являлись бы аналогами указанных отношений. Более того, эти отношения невыразимы средствами никакой из имеющихся систем позитивной силлогистики. Следствием данного обстоятельства является, например, невозможность различения в этих теориях известных из традиционной логики объемных отношений противоречия и соподчинения (в первом случае объемы несовместимых терминов исчерпывают универсум, а во втором нет).

Проблема выразимости отношений исчерпывания и неисчерпывания обычно решается за счет перехода от позитивной силлогистики к негативной – обогащения языка силлогистики оператором терминного отрицания (~) и введения в сферу рассмотрения наряду с примитивными сложных отрицательных терминов. Информацию об универсальности объединения объемов *S* и *P* в фундаментальной негативной силлогистике содержит, например, формула ***~SaP***, а информацию о неуниверсальности их объединения – формула ***~Si~P***. Данный подход

предполагает принятие в силлогистике логического символа принципиально иной синтаксической категории: если константы ***a***, ***i***, ***e***, ***o*** относятся к числу высказываниеобразующих функторов, то новая константа ~ представляет собой терминообразующий оператор.

Ниже предлагается иной способ решения проблемы силлогистического представления всех базисных отношений между объемами двух терминов, который не изменяет категориальной сетки чистой позитивной силлогистики. Его суть состоит во введении в язык новых силлогистических констант: ***u*** – аналога отношения исчерпывания и ***j*** – аналога отношения неисчерпывания. В результате появляются два новых типа элементарных формул: ***SuP*** и ***SjP***. Формула ***SuP*** читается как «Всякий объект есть *S* или *P*», а ***SjP*** – как «Некий объект не есть ни *S*, ни *P*».

Высказывания указанных видов были впервые введены в силлогистику и достаточно подробно исследованы А. Де Морганом в его фундаментальной монографии «Формальная логика» [74].

§ 2. Обобщенная фундаментальная силлогистика

В расширенном языке можно сформулировать множество альтернативных силлогистических теорий. Начнем с обобщенной фундаментальной силлогистики **ОСФ**. Предложим сначала ее семантическую формулировку. Понятие модели <**D**, φ> точно такое же, как и в семантике чистой позитивной силлогистики **СФ** (см. §1 предыдущей главы). Определение функции означивания $|\ |^{\mathbf{D}}_{\varphi}$ дополняется следующими двумя пунктами:

И10. $|SuP|^{\mathbf{D}}_{\varphi} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \cup \varphi(P) = \mathbf{D}$.
И11. $|SjP|^{\mathbf{D}}_{\varphi} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \cup \varphi(P) \neq \mathbf{D}$.

Как и ранее, силлогистическая формула **A** будет считаться истинной (значимой) в модели <**D**, φ>, е.т.е. $|\mathbf{A}|^{\mathbf{D}}_{\varphi} = \mathbf{1}$. Формула **A** **ОСФ**-*общезначима* (является логическим законом силлогистики), е.т.е. она истинна в каждой модели указанного типа.

Заданная в семантике интерпретация силлогистических формул эквивалентным образом выразима посредством их «фундаментального» перевода * на язык классического исчисления предикатов, доопределенного для силлогистических формул двух новых типов следующим образом:

$$(SuP)^* = \forall x(Sx \vee Px),$$
$$(SjP)^* = \exists x(\neg Sx \,\&\, \neg Px).$$

Пара <**D**, φ> может быть использована и в качестве модели для оценки формул языка классического одноместного исчисления предикатов. Причем условия истинности произвольной силлогистической формулы **A** и ее перевода **A*** совпадают в каждой такой модели (это можно доказать аналогично тому, как это делалось относительно семантики системы **СФ** – см. **Лемму 3** предыдущей главы). Отсюда следует, что **A** **ОСФ**-общезначима, е.т.е. ее *-перевод является теоремой исчисления предикатов. Поэтому для получения дедуктивной системы обобщенной позитивной фундаментальной силлогистики, которую операция * погружает в исчисление предикатов, достаточно аксиоматизировать класс **ОСФ**-общезначимых формул.

В.И. Маркин [40] построил в расширенном языке с константами ***a***, ***i***, ***e***, ***o***, ***u***, ***j*** исчисление **ОСФ**, постулатами которого являются:

ОСФ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

ОСФ1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$,

ОСФ2. $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$,

ОСФ3. $(MaP \,\&\, SuM) \supset SuP$,

ОСФ4. $(MuP \,\&\, SeM) \supset SaP$,

ОСФ5. $SeP \supset PeS$,

ОСФ6. $SuP \supset PuS$,

ОСФ7. SaS,

ОСФ8. $SiP \supset SiS$,

ОСФ9. $SoP \supset SiS$,

ОСФ10. $SjP \supset SjS$,

ОСФ11. $SoP \supset PjP$,

ОСФ12. $SiP \equiv \neg SeP$,

ОСФ13. $SoP \equiv \neg SaP$,

ОСФ14. $SjP \equiv \neg SuP$,

ОСФ15. $SiS \vee SjS$.

Правилом вывода в системе является *modus ponens*.

Ниже приводится доказательство адекватности системы **ОСФ** семантике обобщенной фундаментальной силлогистики, осуществленное В.И. Маркиным [40].

Метатеорема 1.

Всякая теорема исчисления **ОСФ** *является* **ОСФ**-*общезначимой формулой.*

Несложно продемонстрировать, что все аксиомы системы **ОСФ** общезначимы, а единственное правило вывода сохраняет свойство «быть **ОСФ**-общезначимой формулой».

Обратная метатеорема (метатеорема о семантической полноте) доказывается с использованием модификации метода Хенкина.

Множество формул $\mathbf{\Gamma}$ рассматриваемого языка назовем **ОСФ**-*непротиворечивым*, е.т.е. формула $\neg(\mathbf{A}_1 \,\&\, \mathbf{A}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathbf{A}_n)$ не доказуема в исчислении **ОСФ** ни для каких $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ из $\mathbf{\Gamma}$.

Пусть **T** – произвольный непустой список силлогистических терминов. Множество формул Δ назовем **ОСФ**-*максимальным относительно списка* **T**, е.т.е. (1) Δ является **ОСФ**-непротиворечивым; (2) формулы из Δ не содержат терминов, отсутствующих в **T**; (3) для любой формулы **A** подобного типа верно, что $\mathbf{A} \in \Delta$ или $\neg\mathbf{A} \in \Delta$.

Множество формул, **ОСФ**-максимальное относительно списка терминов **T**, обладает рядом важных свойств:

1. оно содержит все теоремы **ОСФ** подъязыка, соответствующего списку **T**;
2. замкнуто относительно *modus ponens*;
3. $\neg\mathbf{A} \in \Delta$, е.т.е. $\mathbf{A} \notin \Delta$;
4. $\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B} \in \Delta$, е.т.е. $\mathbf{A} \in \Delta \;\dot{\&}\; \mathbf{B} \in \Delta$;
5. $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \in \Delta$ е.т.е. $\mathbf{A} \in \Delta \;\dot{\vee}\; \mathbf{B} \in \Delta$;
6. $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \in \Delta$ е.т.е. $\mathbf{A} \in \Delta \;\supset\; \mathbf{B} \in \Delta$

где **A** и **B** – произвольные формулы, которые не содержат терминов, отсутствующих в **T**.

Утверждение 1.

Если Δ_1 **ОСФ**-*максимально относительно списка* $\mathbf{T}_1$, *а каждый термин, входящий в список* $\mathbf{T}_2$, *содержится в* $\mathbf{T}_1$, *и* Δ_2 – *множество всех формул из* Δ_1, *которые не содержат терминов, отсутствующих в* $\mathbf{T}_2$, *то* Δ_2 **ОСФ**-*максимально относительно списка* $\mathbf{T}_2$.

Докажем аналог леммы Линденбаума:

Лемма 1.

Произвольное **ОСФ**-*непротиворечивое множество* **Γ**, *такое, что список* **T** *терминов, входящих в его формулы, конечен, можно расширить до* **ОСФ**-*максимального относительно* **T** *множества формул* Δ

Пусть **Γ** – произвольное **ОСФ**-непротиворечивое множество, причем список **T** терминов, входящих в состав формул из **Γ**, конечен. Рассмотрим пересчет $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots$ всех таких формул языка, которые не содержат терминов, отсутствующих в **T**. Строим последовательность множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ так: $\Delta_1 = \Gamma$; $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$, если $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **ОСФ**-непротиворечиво, и $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\mathbf{C}_n\}$, если $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **ОСФ**-противоречиво. Пусть Δ – результат объединения всех множеств бесконечной последовательности $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ Сконструированное нами множество формул Δ является **ОСФ**-максимальным относительно **T**.

Особо нас будут интересовать случаи, когда список **T**, относительно которого множество формул ♟ **ОСФ**-максимально, содержит один или же два термина.

Утверждение 2.

*Если ♟ **ОСФ**-максимально относительно одноэлементного списка терминов $\{M_1\}$, то множество элементарных формул из ♟ является одним из трех классов: $\{M_1aM_1, M_1iM_1, M_1uM_1\}$ или $\{M_1aM_1, M_1eM_1, M_1jM_1\}$ или $\{M_1aM_1, M_1iM_1, M_1jM_1\}$.*

Очевидно, что существует в точности 6 элементарных формул, содержащих ровно один термин. В силу непротиворечивости множества ♟, аксиом **ОСФ7**, **ОСФ12**, **ОСФ13** и **ОСФ14** и свойств максимального множества, множество ♟ включает в себя ровно 3 элементарные формулы: одна из них – M_1aM_1 (это закон **ОСФ**), вторая – M_1iM_1 или M_1eM_1, третья – M_1uM_1 или M_1jM_1. Причем формулы M_1eM_1 и M_1uM_1 не могут одновременно содержаться в ♟, так как в этом случае ♟ оказалось бы **ОСФ**-противоречивым, ведь из аксиом **ОСФ15**, **ОСФ12** и **ОСФ14** легко получить в качестве теоремы формулу $\neg(M_1eM_1 \ \& \ M_1uM_1)$.

Остается показать непротиворечивость трех указанных выше множеств элементарных формул. Для каждого из них можно подобрать модель, в которой все формулы данного множества истинны: для $\{M_1aM_1, M_1iM_1, M_1uM_1\}$ это модель, где $\varphi(M_1) = \mathbf{D}$, для $\{M_1aM_1, M_1eM_1, M_1jM_1\}$ – $\varphi(M_1) = \varnothing$, для $\{M_1aM_1, M_1iM_1, M_1jM_1\}$ это модель, где φ сопоставляет M_1 произвольный непустой подкласс **D**, не совпадающий с универсумом. Поэтому каждая из конъюнкций $M_1aM_1 \ \& \ M_1iM_1 \ \& \ M_1uM_1$, $M_1aM_1 \ \& \ M_1eM_1 \ \& \ M_1jM_1$ и $M_1aM_1 \ \& \ M_1iM_1 \ \& \ M_1jM_1$ истинна в соответствующей модели, их отрицания необщезначимы и, следовательно, согласно **Метатеореме 1**, недоказуемы в **ОСФ**. **Утверждение 2** *доказано.*

Рассмотрим далее случай, когда ♟ максимально относительно двухэлементного списка терминов $\{M_1, M_2\}$. Назовем *характеристическим* такое подмножество ♟ $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}$, в котором $\mathbf{F}_1$ есть M_1eM_2 либо M_1iM_2, $\mathbf{F}_2$ есть M_1aM_2 либо M_1oM_2, $\mathbf{F}_3$ есть M_2aM_1 либо M_2oM_1, $\mathbf{F}_4$ есть M_1uM_2 либо M_1jM_2.

Утверждение 3.

*Если ♟ **ОСФ**-максимально относительно двухэлементного списка терминов $\{M_1, M_2\}$, то в качестве характеристического оно содержит одно из 15 множеств:*

X1 = $\{M_1eM_2, M_1aM_2, M_2aM_1, M_1jM_2\}$,
X2 = $\{M_1eM_2, M_1aM_2, M_2oM_1, M_1uM_2\}$,
X3 = $\{M_1eM_2, M_1oM_2, M_2aM_1, M_1uM_2\}$,
X4 = $\{M_1iM_2, M_1aM_2, M_2aM_1, M_1uM_2\}$,
X5 = $\{M_1eM_2, M_1aM_2, M_2oM_1, M_1jM_2\}$,
X6 = $\{M_1eM_2, M_1oM_2, M_2aM_1, M_1jM_2\}$,
X7 = $\{M_1iM_2, M_1oM_2, M_2aM_1, M_1uM_2\}$,
X8 = $\{M_1iM_2, M_1aM_2, M_2oM_1, M_1uM_2\}$,
X9 = $\{M_1iM_2, M_1aM_2, M_2oM_1, M_1jM_2\}$,
X10 = $\{M_1iM_2, M_1oM_2, M_2aM_1, M_1jM_2\}$,
X11 = $\{M_1iM_2, M_1aM_2, M_2aM_1, M_1jM_2\}$,
X12 = $\{M_1eM_2, M_1oM_2, M_2oM_1, M_1jM_2\}$,
X13 = $\{M_1iM_2, M_1oM_2, M_2oM_1, M_1jM_2\}$,
X14 = $\{M_1eM_2, M_1oM_2, M_2oM_1, M_1uM_2\}$,
X15 = $\{M_1iM_2, M_1oM_2, M_2oM_1, M_1uM_2\}$.

Для каждого из перечисленных множеств можно подобрать модель, в которой все его формулы истинны. Для **X1** это модель с пустыми $\varphi(M_1)$ и $\varphi(M_2)$. Для **X2** – с пустым $\varphi(M_1)$ и универсальным $\varphi(M_2)$. Для **X3** – с универсальным $\varphi(M_1)$ и пустым $\varphi(M_2)$. Для **X4** – с универсальными $\varphi(M_1)$ и $\varphi(M_2)$. Для **X5** – с пустым $\varphi(M_1)$ и правильным (т.е. непустым и неуниверсальным) $\varphi(M_2)$. Для **X6** – с правильным $\varphi(M_1)$ и пустым $\varphi(M_2)$. Для **X7** – с универсальным $\varphi(M_1)$ и правильным $\varphi(M_2)$. Для **X8** – с правильным $\varphi(M_1)$ и универсальным $\varphi(M_2)$.

Для характеристических множеств **X9-X15** в искомых моделях $\varphi(M_1)$ и $\varphi(M_2)$ являются правильными. При этом для **X9** имеет место $\varphi(M_1) \subset \varphi(M_2)$. Для **X10** – $\varphi(M_2) \subset \varphi(M_1)$. Для **X11** – $\varphi(M_1) = \varphi(M_2)$. Для **X12** – $\varphi(M_1) \cap \varphi(M_2) = \varnothing$ и $\varphi(M_1) \cup \varphi(M_2) \neq \mathbf{D}$. Для **X13** – $\varphi(M_1) \cap \varphi(M_2) \neq \varnothing$, $\varphi(M_1) \setminus \varphi(M_2) \neq \varnothing$, $\varphi(M_2) \setminus \varphi(M_1) \neq \varnothing$ и $\varphi(M_1) \cup \varphi(M_2) \neq \mathbf{D}$. Для **X14** – $\varphi(M_1) \cap \varphi(M_2) = \varnothing$ и $\varphi(M_1) \cup \varphi(M_2) = \mathbf{D}$. Для **X15** – $\varphi(M_1) \cap \varphi(M_2) \neq \varnothing$, $\varphi(M_1) \setminus \varphi(M_2) \neq \varnothing$, $\varphi(M_2) \setminus \varphi(M_1) \neq \varnothing$ и $\varphi(M_1) \cup \varphi(M_2) = \mathbf{D}$.

Поскольку каждая из формул $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ в составе каждого из перечисленных характеристических множеств истинна в соответствующей модели, все 15 формул вида $\neg(\mathbf{F}_1 \ \& \ \mathbf{F}_2 \ \& \ \mathbf{F}_3 \ \& \ \mathbf{F}_4)$ недоказуемы в **ОСФ**, а значит **X1-X15** **ОСФ**-непротиворечивы.

Единственное характеристическое множество, которое не может содержаться ни в каком максимальном множестве ♟ в силу непротиворечивости последнего, – это $\{M_1eM_2, M_1aM_2, M_2aM_1, M_1uM_2\}$, поскольку отрицание конъюнкции формул данного множества – теорема системы **ОСФ**. **Утверждение 3** *доказано*.

Каждое характеристическое подмножество $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}$ **ОСФ**-максимального относительно двухэлементного списка терминов множества ▲ однозначным образом определяет все другие элементарные формулы в составе данного ▲.

Вообще, в подъязыке с двумя терминами M_1 и M_2 имеется 24 элементарные формулы: M_1yM_1, M_2yM_2, M_1yM_2, M_2yM_1, где y – одна из шести силлогистических констант. В силу того, что формулы типов a и o, e и i, u и j с одинаковыми субъектом и предикатом находятся в отношении противоречия, лишь 12 элементарных формул содержатся в максимальном множестве ▲ указанного типа.

Рассмотрим произвольное характеристическое подмножество **XN** = $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}$ $(1 \le \mathbf{N} \le 15)$ некоторого ▲, **ОСФ**-максимального относительно списка $\{M_1, M_2\}$. Покажем, как оно может быть расширено до **ЭN** – множества всех элементарных формул в составе данного ▲. Прежде всего в каждое **XN** следует включить формулы M_1aM_1 и M_2aM_2, ведь они являются частными случаями схемы **ОСФ7**, а все теоремы **ОСФ** данного подъязыка должны содержаться в соответствующем максимальном множестве. Кроме того, если $\mathbf{F}_1$ есть M_1eM_2, то к **XN** следует добавить формулу M_2eM_1 в силу **ОСФ5** и замкнутости ▲ относительно *modus ponens*; если же $\mathbf{F}_3$ есть M_1iM_2, то добавляется M_2iM_1, так как формула $M_1iM_2 \supset M_2iM_1$ доказуема в **ОСФ**. По сходным причинам (в силу чистой обратимости формул видов u и j) если $\mathbf{F}_4$ есть M_1uM_2, добавляем к **XN** формулу M_2uM_1, если же $\mathbf{F}_4$ есть M_1jM_2, присоединяем M_2jM_1.

Выбор остальных четырех формул из пар M_1eM_1 и M_1iM_1, M_1uM_1 и M_1jM_1, M_2eM_2 и M_2iM_2, M_2uM_2 и M_2jM_2 осуществляется с использованием теорем **ОСФ** следующих типов:

$SiP \supset (SiS \,\&\, PiP)$, $\qquad (SeP \,\&\, SaP) \supset SeS$,

$SoP \supset (SiS \,\&\, PjP)$, $\qquad (SuP \,\&\, SaP) \supset PuP$.

$SjP \supset (SjS \,\&\, PjP)$.

Перечислим, какие элементарные формулы из указанных только что пар формул должны быть введены в **Э1-Э15**:

в **Э1** – M_1eM_1, M_1jM_1, M_2eM_2, M_2jM_2,
в **Э2** – M_1eM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2uM_2,
в **Э3** – M_1iM_1, M_1uM_1, M_2eM_2, M_2jM_2,
в **Э4** – M_1iM_1, M_1uM_1, M_2iM_2, M_2uM_2,

в **Э5** – M_1eM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2,
в **Э6** – M_1iM_1, M_1jM_1, M_2eM_2, M_2jM_2,
в **Э7** – M_1iM_1, M_1uM_1, M_2iM_2, M_2jM_2,
в **Э8** – M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2uM_2,
в **Э9-Э15** – M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2.

Таким образом, искомыми расширениями множеств **X1-X15**, содержащими все элементарные формулы в составе **ОСФ**-максимального относительно списка $\{M_1, M_2\}$ множества ▲, являются:

Э1 = $\{M_1eM_2, M_1aM_2, M_2aM_1, M_1jM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2eM_1, M_2jM_1, M_1eM_1, M_1jM_1, M_2eM_2, M_2jM_2\}$,
Э2 = $\{M_1eM_2, M_1aM_2, M_2oM_1, M_1uM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2eM_1, M_2uM_1, M_1eM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2uM_2\}$,
Э3 = $\{M_1eM_2, M_1oM_2, M_2aM_1, M_1uM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2eM_1, M_2uM_1, M_1iM_1, M_1uM_1, M_2eM_2, M_2jM_2\}$,
Э4 = $\{M_1iM_2, M_1aM_2, M_2aM_1, M_1uM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2iM_1, M_2uM_1, M_1iM_1, M_1uM_1, M_2iM_2, M_2uM_2\}$,
Э5 = $\{M_1eM_2, M_1aM_2, M_2oM_1, M_1jM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2eM_1, M_2jM_1, M_1eM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$,
Э6 = $\{M_1eM_2, M_1oM_2, M_2aM_1, M_1jM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2eM_1, M_2jM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2eM_2, M_2jM_2\}$,
Э7 = $\{M_1iM_2, M_1oM_2, M_2aM_1, M_1uM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2iM_1, M_2uM_1, M_1iM_1, M_1uM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$,
Э8 = $\{M_1iM_2, M_1aM_2, M_2oM_1, M_1uM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2iM_1, M_2uM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2uM_2\}$,
Э9 = $\{M_1iM_2, M_1aM_2, M_2oM_1, M_1jM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2iM_1, M_2jM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$,
Э10 = $\{M_1iM_2, M_1oM_2, M_2aM_1, M_1jM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2iM_1, M_2jM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$,
Э11 = $\{M_1iM_2, M_1aM_2, M_2aM_1, M_1jM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2iM_1, M_2jM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$,
Э12 = $\{M_1eM_2, M_1oM_2, M_2oM_1, M_1jM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2eM_1, M_2jM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$,
Э13 = $\{M_1iM_2, M_1oM_2, M_2oM_1, M_1jM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2iM_1, M_2jM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$,
Э14 = $\{M_1eM_2, M_1oM_2, M_2oM_1, M_1uM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2eM_1, M_2uM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$,
Э15 = $\{M_1iM_2, M_1oM_2, M_2oM_1, M_1uM_2, M_1aM_1, M_2aM_2, M_2iM_1, M_2uM_1, M_1iM_1, M_1jM_1, M_2iM_2, M_2jM_2\}$.

Каждая (из перечисленных) формул произвольного множества **ЭN** выводима в системе **ОСФ** из соответствующего **XN**.

По существу, мы обосновали следующее утверждение:

Утверждение 4.

Если $\blacktriangle$ **ОСФ**-*максимально относительно двухэлементного списка терминов* $\{M_1, M_2\}$, *то класс элементарных формул из* $\blacktriangle$ *является одним из пятнадцати множеств* **Э1-Э15**, *каждое из которых представляет собой расширение какого-то из характеристических множеств* **X1-X15**.

С каждым множеством формул, **ОСФ**-максимальным относительно конечного списка терминов, будем далее связывать каноническую модель. Но предварительно введем ряд понятий и обоснуем справедливость нескольких утверждений.

Описанием объекта посредством терминов $M_1, \ldots, M_n$ назовем множество $\{M_1^0, \ldots, M_n^0\}$, где каждое M_i^0 есть либо M_i^+, либо M_i^-. Неформально, наличие M_i^+ в описании некоторого объекта означает присущность, а наличие M_i^- – неприсущность ему свойства M_i. В качестве метапеременных по описаниям объектов будем использовать буквы α и β (возможно с индексами).

Пусть $\blacktriangle$ является **ОСФ**-максимальным множеством формул относительно конечного списка терминов **T**. Описание α объекта посредством терминов $M_1, \ldots, M_n$ назовем $\blacktriangle$-*допустимым*, е.т.е. (1) $\{M_1, \ldots, M_n\}$ = **T**, и для любых терминов M_s и M_t из данного списка: (2) ($M_s^+ \in \alpha$ & $M_t^+ \in \alpha$) $\supset$ $M_s i M_t \in \blacktriangle$, (3) ($M_s^+ \in \alpha$ & $M_t^- \in \alpha$) $\supset$ $M_s o M_t \in \blacktriangle$ (4) ($M_s^- \in \alpha$ & $M_t^- \in \alpha$) $\supset$ $M_s j M_t \in \blacktriangle$

Если список **T** состоит из одного термина M_1, то существует всего два описания объекта $\{M_1^+\}$ и $\{M_1^-\}$. Ответим на вопрос, для каких $\blacktriangle$, максимальных относительно $\{M_1\}$, они допустимы.

Если множество элементарных формул из $\blacktriangle$ есть $\{M_1 a M_1, M_1 i M_1, M_1 u M_1\}$, то, согласно определению $\blacktriangle$-допустимого описания, таковым является лишь $\{M_1^+\}$. Описание $\{M_1^-\}$ не является $\blacktriangle$-допустимым, ведь если бы оно было $\blacktriangle$-допустимым, формула $M_1 j M_1$ должна была бы содержаться в $\blacktriangle$.

Если множество элементарных формул из $\blacktriangle$ есть $\{M_1 a M_1, M_1 e M_1, M_1 j M_1\}$, то $\blacktriangle$-допустимым является лишь описание $\{M_1^-\}$. $\{M_1^+\}$ не будет в данном случае $\blacktriangle$-допустимым, так как если предположить обратное, формула $M_1 i M_1$ должна была бы содержаться в $\blacktriangle$, что не соответствует действительности.

Если же множество элементарных формул из $\blacktriangle$ есть $\{M_1 a M_1, M_1 i M_1, M_1 j M_1\}$, то $\blacktriangle$-допустимы оба описания – $\{M_1^+\}$ и $\{M_1^-\}$.

Лемма 2.

Если $\blacktriangle$ *является* **ОСФ**-*максимальным относительно списка* $\{M_1\}$, *то (1) если* $M_1 i M_1 \in \blacktriangle$, *то* $\{M_1^+\}$ *является* $\blacktriangle$-*допустимым описанием объекта; (2) если* $M_1 j M_1 \in \blacktriangle$ *то* $\{M_1^-\}$ *является* $\blacktriangle$-*допустимым описанием объекта.*

Доказательство леммы основано на **Утверждении 2** и сопоставлении каждого из трех возможных множеств элементарных формул в составе $\blacktriangle$ – $\{M_1 a M_1, M_1 i M_1, M_1 u M_1\}$, $\{M_1 a M_1, M_1 e M_1, M_1 j M_1\}$, $\{M_1 a M_1, M_1 i M_1, M_1 j M_1\}$ – с соответствующими $\blacktriangle$-допустимыми описаниями объекта.

Рассмотрим список $M_1, \ldots, M_n$, состоящий из двух терминов: M_1 и M_2. Тогда существует четыре возможных описания объекта: $\beta_1 = \{M_1^+, M_2^+\}$; $\beta_2 = \{M_1^+, M_2^-\}$; $\beta_3 = \{M_1^-, M_2^+\}$; $\beta_4 = \{M_1^-, M_2^-\}$.

Приведем списки $\blacktriangle$-допустимых описаний для всех 15 типов **ОСФ**-максимальных относительно $\{M_1, M_2\}$ множеств $\blacktriangle$, различающихся классами элементарных формул **Э1-Э15**:

Э1: β_4;	**Э6**: β_2, β_4;	**Э11**: β_1, β_4;
Э2: β_3;	**Э7**: β_1, β_2;	**Э12**: β_2, β_3, β_4;
Э3: β_2;	**Э8**: β_1, β_3;	**Э13**: β_1, β_2, β_3, β_4;
Э4: β_1;	**Э9**: β_1, β_3, β_4;	**Э14**: β_2, β_3;
Э5: β_3, β_4;	**Э10**: β_1, β_2, β_4;	**Э15**: β_1, β_2, β_3.

Лемма 3.

Пусть $\blacktriangle$ *является* **ОСФ**-*максимальным относительно списка* $\{M_1, M_2\}$; *тогда (1) если* $M_1 i M_2 \in \blacktriangle$, *то* $\{M_1^+, M_2^+\}$ *является* $\blacktriangle$-*допустимым описанием объекта; (2) если* $M_1 o M_2 \in \blacktriangle$ *то* $\{M_1^+, M_2^-\}$ $\blacktriangle$-*допустимо; (3) если* $M_2 o M_1 \in \blacktriangle$, *то* $\{M_1^-, M_2^+\}$ $\blacktriangle$-*допустимо; (4) если* $M_1 j M_2 \in \blacktriangle$ *то* $\{M_1^-, M_2^-\}$ $\blacktriangle$-*допустимо.*

Согласно **Утверждению 4**, любое **ОСФ**-максимальное относительно списка $\{M_1, M_2\}$ множество формул содержит в качестве подкласса элементарных подформул одно из множеств **Э1-Э15**. Сопоставляя каждое из них с соответствующими ему $\blacktriangle$-допустимыми описаниями объекта, убеждаемся в справедливости леммы.

Теперь обоснуем два важных утверждения о соотношении между описаниями объекта, допустимыми относительно таких **ОСФ**-максимальных множеств, одно из которых вложено в другое.

Лемма 4.

Пусть $\blacktriangle_1$ *–* **ОСФ**-*максимальное множество относительно списка терминов* $\{M_1,..., M_n\}$, *а* $\blacktriangle_2$ *–* **ОСФ**-*максимальное множество относительно списка терминов* $\{M_1,..., M_n, Q\}$. *Пусть также* $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$. *Тогда для любого* $\blacktriangle_1$-*допустимого описания* α *найдется* $\blacktriangle_2$-*допустимое описание* β, *такое что* $\beta = \alpha \cup \{Q^+\}$ *или* $\beta = \alpha \cup \{Q^-\}$.

Рассмотрим произвольное $\blacktriangle_1$-допустимое описание α. Обозначим символом **P** множество всех таких терминов-универсалий M_i из списка $\{M_1,..., M_n\}$, что $M_i^+ \in \alpha$; а множество универсалий M_j из данного списка, таких что $M_j^- \in \alpha$, обозначим символом **S**. Ясно, что $\mathbf{P} \cup \mathbf{S} = \{M_1,..., M_n\}$.

Возможны три ситуации: **(I)** как **P**, так и **S** непусты; **(II)** **S** пусто; **(III)** **P** пусто.

Наибольшую сложность представляет ситуация **(I)**, которую мы и рассмотрим подробнее.

Итак, согласно определению $\blacktriangle$-допустимого описания объекта, для любых терминов P_1, P_2 из **P**, любых терминов S_1, S_2 из **S** верно:

(i) $P_1iP_2 \in \blacktriangle_1$; (ii) $S_1jS_2 \in \blacktriangle_1$; (iii) $P_1aS_1 \in \blacktriangle_1$.

Случай 1. В **P** найдется термин P_1, такой что $P_1aQ \in \blacktriangle_2$.

Тогда искомое $\beta = \alpha \cup \{Q^+\}$. Чтобы продемонстрировать $\blacktriangle_2$-допустимость β, нужно показать, что $QiQ \in \blacktriangle_2$ и для произвольных $P_2 \in \mathbf{P}$ и $S_1 \in \mathbf{S}$ имеет место: $QiP_2 \in \blacktriangle_2$, $P_2iQ \in \blacktriangle_2$, $QoS_1 \in \blacktriangle_2$.

1.	$P_1aQ \in \blacktriangle_2$	условие случая 1
2.	$P_1iP_2 \in \blacktriangle_2$	(i); $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$
3.	$(QeP_2 \ \& \ P_1aQ) \supset P_1eP_2 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ2**
4.	$(\neg P_1eP_2 \ \& \ P_1aQ) \supset \neg QeP_2 \in \blacktriangle_2$	3; **ЛВ**
5.	$P_1iP_2 \equiv \neg P_1eP_2 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ12**
6.	$QiP_2 \equiv \neg QeP_2 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ12**
7.	$(P_1iP_2 \ \& \ P_1aQ) \supset QiP_2 \in \blacktriangle_2$	4, 5, 6; **ЛВ**
8.	$QiP_2 \in \blacktriangle_2$	7, 2, 1; **ЛВ**
9.	$QiP_2 \supset QiQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ8**
10.	$QiQ \in \blacktriangle_2$	9, 8; **ЛВ**
11.	$QiP_2 \supset P_2iQ \in \blacktriangle_2$	теорема (следует из **ОСФ5** и **ОСФ12**)
12.	$P_2iQ \in \blacktriangle_2$	11, 8; **ЛВ**
13.	$P_1aS_1 \in \blacktriangle_2$	(iii), $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$
14.	$(QaS_1 \ \& \ P_1aQ) \supset P_1aS_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ1**

15.	$(\neg P_1aS_1 \ \& \ P_1aQ) \supset \neg QaS_1 \in \blacktriangle_2$	14; **ЛВ**
16.	$P_1oS_1 \equiv \neg P_1aS_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ13**
17.	$QoS_1 \equiv \neg QaS_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ13**
18.	$(P_1aS_1 \ \& \ P_1aQ) \supset QoS_1 \in \blacktriangle_2$	15, 16, 17; **ЛВ**
19.	$QoS_1 \in \blacktriangle_2$	13, 1, 18; **ЛВ**

Подлежащие доказательству положения занимают в метарассуждении места 8, 10, 12 и 19.

Случай 2. В **P** не найдется термина P_1, такого что $P_1aQ \in \blacktriangle_2$, но в **P** найдется термин P_1, такой что $P_1eQ \in \blacktriangle_2$.

Тогда искомое $\beta = \alpha \cup \{Q^-\}$. Для демонстрации $\blacktriangle_2$-допустимости β, необходимо показать, что $QjQ \in \blacktriangle_2$ и для произвольных $P_2 \in \mathbf{P}$ и $S_1 \in \mathbf{S}$ верно: $P_2oQ \in \blacktriangle_2$, $QjS_1 \in \blacktriangle_2$, $S_1jQ \in \blacktriangle_2$.

1.	$P_1eQ \in \blacktriangle_2$	условие случая 2
2.	$P_1eQ \supset QeP_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ5**
3.	$QeP_1 \in \blacktriangle_2$	1, 2; **ЛВ**
4.	$(QeP_1 \ \& \ P_2aQ) \supset P_2eP_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ2**
5.	$(QeP_1 \ \& \ \neg P_2eP_1) \supset \neg P_2aQ \in \blacktriangle_2$	4; **ЛВ**
6.	$P_2iP_1 \equiv \neg P_2eP_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ12**
7.	$P_2oQ \equiv \neg P_2aQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ13**
8.	$(QeP_1 \ \& \ P_2iP_1) \supset P_2oQ \in \blacktriangle_2$	5, 6, 7; **ЛВ**
9.	$P_2iP_1 \in \blacktriangle_2$	(i); $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$
10.	$P_2oQ \in \blacktriangle_2$	8, 3, 9; **ЛВ**
11.	$P_2oQ \supset QjQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ11**
12.	$QjQ \in \blacktriangle_2$	11, 10; **ЛВ**
13.	$P_1aS_1 \in \blacktriangle_2$	(iii), $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$
14.	$(QuS_1 \ \& \ P_1eQ) \supset P_1aS_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ4**
15.	$(\neg P_1aS_1 \ \& \ P_1eQ) \supset \neg QuS_1 \in \blacktriangle_2$	14; **ЛВ**
16.	$P_1oS_1 \equiv \neg P_1aS_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ13**
17.	$QjS_1 \equiv \neg QuS_1 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ14**
18.	$(P_1aS_1 \ \& \ P_1eQ) \supset QjS_1 \in \blacktriangle_2$	15, 16, 17; **ЛВ**
19.	$QjS_1 \in \blacktriangle_2$	18, 13, 1; **ЛВ**
20.	$QjS_1 \supset S_1jQ \in \blacktriangle_2$	теорема (следует из **ОСФ6** и **ОСФ14**)
21.	$S_1jQ \in \blacktriangle_2$	20, 19; **ЛВ**

Подлежащие доказательству положения занимают в метарассуждении места 10, 12, 19 и 21.

Случай 3. В **P** не найдется термина P_1, такого что $P_1aQ \in \blacktriangle_2$ или $P_1eQ \in \blacktriangle_2$, но в **S** найдется термин S_1 такой что $QaS_1 \in \blacktriangle_2$.

Тогда искомое $\beta = \alpha \cup \{Q^-\}$. Чтобы продемонстрировать $\blacktriangle_2$-допустимость β, нужно показать, что $QiQ \in \blacktriangle_2$ и для произвольных $P_j \in \mathbf{P}$ и $S_j \in \mathbf{S}$ верно: $P_j aQ \in \blacktriangle_2$, $S_j iQ \in \blacktriangle_2$, $QiS_j \in \blacktriangle_2$.

1.	$QaS_i \in \blacktriangle_2$	условие случая 3
2.	$P_j aS_i \in \blacktriangle_2$	(iii), $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$
3.	$(QaS_i \,\&\, P_j aQ) \supset P_j aS_i \in \blacktriangle_2$	**ОСФ1**
4.	$(QaS_i \,\&\, \neg P_j aS_i) \supset \neg P_j aQ \in \blacktriangle_2$	3; ЛВ
5.	$P_j aS_i \equiv \neg P_j aS_i \in \blacktriangle_2$	**ОСФ13**
6.	$P_j aQ \equiv \neg P_j aQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ13**
7.	$(QaS_i \,\&\, P_j aS_i) \supset P_j aQ \in \blacktriangle_2$	4, 5, 6; ЛВ
8.	$P_j aQ \in \blacktriangle_2$	7, 1, 2; ЛВ
9.	$S_j iS_i \in \blacktriangle_2$	(ii); $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$
10.	$(QaS_i \,\&\, S_j uQ) \supset S_j uS_i \in \blacktriangle_2$	**ОСФ3**
11.	$(QaS_i \,\&\, \neg S_j uS_i) \supset \neg S_j uQ \in \blacktriangle_2$	10; ЛВ
12.	$S_j iS_i \equiv \neg S_j uS_i \in \blacktriangle_2$	**ОСФ14**
13.	$S_j iQ \equiv \neg S_j uQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ14**
14.	$(QaS_i \,\&\, S_j iS_i) \supset S_j iQ \in \blacktriangle_2$	11, 12, 13; ЛВ
15.	$S_j iQ \in \blacktriangle_2$	14, 1, 9; ЛВ
16.	$S_j iQ \supset QiS_j \in \blacktriangle_2$	теорема (следует из **ОСФ6** и **ОСФ14**)
17.	$QiS_j \in \blacktriangle_2$	16, 15; ЛВ
18.	$QiS_j \supset QiQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ10**
19.	$QiQ \in \blacktriangle_2$	18, 17; ЛВ

Подлежащие доказательству положения занимают в метарассуждении места 8, 15, 17 и 19.

Случай 4. В **P** не найдется термина P_j, такого что $P_j aQ \in \blacktriangle_2$ или $P_j eQ \in \blacktriangle_2$, и в **S** не найдется термина S_i, такого что $QaS_i \in \blacktriangle_2$, но в **S** найдется термин S_j, такой что $QuS_j \in \blacktriangle_2$.

Тогда искомое $\beta = \alpha \cup \{Q^+\}$. Для демонстрации $\blacktriangle_2$-допустимости β, необходимо показать, что $QiQ \in \blacktriangle_2$ и для произвольных $P_j \in \mathbf{P}$ и $S_2 \in \mathbf{S}$ имеет место: $QiP_j \in \blacktriangle_2$, $P_j iQ \in \blacktriangle_2$, $QoS_2 \in \blacktriangle_2$.

1.	$QuS_j \in \blacktriangle_2$	условие случая 4
2.	$P_j aS_j \in \blacktriangle_2$	(iii), $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$
3.	$(QuS_j \,\&\, P_j eQ) \supset P_j aS_j \in \blacktriangle_2$	**ОСФ4**
4.	$(QuS_j \,\&\, \neg P_j aS_j) \supset \neg P_j eQ \in \blacktriangle_2$	3; ЛВ
5.	$P_j aS_j \equiv \neg P_j aS_j \in \blacktriangle_2$	**ОСФ13**
6.	$P_j iQ \equiv \neg P_j eQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ12**
7.	$(QuS_j \,\&\, P_j oS_j) \supset P_j iQ \in \blacktriangle_2$	4, 5, 6; ЛВ
8.	$P_j iQ \in \blacktriangle_2$	7, 1, 2; ЛВ
9.	$P_j iQ \supset QiP_j \in \blacktriangle_2$	теорема (следует из **ОСФ5** и **ОСФ12**)
10.	$QiP_j \in \blacktriangle_2$	9, 8; ЛВ
11.	$QuS_j \supset S_j uQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ6**
12.	$S_j uQ \in \blacktriangle_2$	11, 1; ЛВ
13.	$(QaS_2 \,\&\, S_j uQ) \supset S_j uS_2 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ3**
14.	$S_j iS_2 \in \blacktriangle_2$	(ii); $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$
15.	$(\neg S_j uS_2 \,\&\, S_j uQ) \supset \neg QaS_2 \in \blacktriangle_2$	13; ЛВ
16.	$S_j iS_2 \equiv \neg S_j uS_2 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ14**
17.	$QoS_2 \equiv \neg QaS_2 \in \blacktriangle_2$	**ОСФ13**
18.	$(S_j iS_2 \,\&\, S_j uQ) \supset QoS_2 \in \blacktriangle_2$	15, 16, 17; ЛВ
19.	$QoS_2 \in \blacktriangle_2$	18, 14, 12; ЛВ
20.	$QoS_2 \supset QiQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ9**
21.	$QiQ \in \blacktriangle_2$	20, 19; ЛВ

Подлежащие доказательству положения занимают в метарассуждении места 8, 10, 19 и 21.

Случай 5. В **P** не найдется термина P_j, такого что $P_j aQ \in \blacktriangle_2$ или $P_j eQ \in \blacktriangle_2$, а в **S** не найдется термина S_i, такого что $QaS_i \in \blacktriangle_2$ или $QuS_i \in \blacktriangle_2$.

Тогда в силу **ОСФ**-максимальности множества $\blacktriangle_2$ и наличия в нем аксиом данной системы видов **ОСФ12**, **ОСФ13**, **ОСФ14** для любых терминов P_j из **P** и S_j из **S** имеем:

1.	$P_j oQ \in \blacktriangle_2$	
2.	$P_j iQ \in \blacktriangle_2$	
3.	$QoS_j \in \blacktriangle_2$	
4.	$QiS_j \in \blacktriangle_2$	

Продолжим рассуждение:

5.	$P_j iQ \supset QiP_j \in \blacktriangle_2$	теорема (следует из **ОСФ5** и **ОСФ12**)
6.	$QiP_j \in \blacktriangle_2$	5, 2; ЛВ
7.	$QiP_j \supset QiQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ8**
8.	$QiQ \in \blacktriangle_2$	7, 6; ЛВ
9.	$QiS_j \supset QiQ \in \blacktriangle_2$	**ОСФ10**
10.	$QiQ \in \blacktriangle_2$	9, 4; ЛВ
11.	$QiS_j \supset S_j iQ \in \blacktriangle_2$	теорема (следует из **ОСФ6** и **ОСФ14**)
12.	$S_j iQ \in \blacktriangle_2$	11, 4; ЛВ

Положения 2, 3, 6 и 8 данного рассуждения свидетельствуют о том, что в качестве искомого β может быть выбрано описание $\alpha \cup \{Q^+\}$. А положения 1, 4, 10, 12 позволяют в качестве β рассматривать описание $\alpha \cup \{Q^-\}$.

Таким образом, мы показали, что в ситуации (**I**), когда $\blacktriangle_1$-допустимое описание α содержит как выражения вида M_i^+, так и выражения вида M_i^-, утверждение леммы справедливо.

В ситуации (**II**), когда **S** пусто, т.е. $\alpha = \{M_1^+,..., M_n^+\}$, следует рассмотреть три случая:

(a) в α найдется термин P_1, такой что $P_1 \mathbf{a} Q \in \blacktriangle_2$. Тогда в качестве β выбираем $\alpha \cup \{Q^+\}$;

(b) в α не найдется термина P_1, такого что $P_1 \mathbf{a} Q \in \blacktriangle_2$, но найдется термин P_1, такой что $P_1 \mathbf{e} Q \in \blacktriangle_2$. Тогда искомое $\beta = \alpha \cup \{Q^-\}$;

(c) в α не найдется термина P_1, такого что $P_1 \mathbf{a} Q \in \blacktriangle_2$ или $P_1 \mathbf{e} Q \in \blacktriangle_2$. В этом случае в качестве β следует выбрать $\alpha \cup \{Q^+\}$.

В ситуации (**III**), когда **P** пусто, т.е. $\alpha = \{M_1^-,..., M_n^-\}$, следует также рассмотреть три случая:

(a) в α найдется термин S_1 такой, что $Q \mathbf{a} S_1 \in \blacktriangle_2$. Тогда искомое $\beta = \alpha \cup \{Q^-\}$;

(b) в α не найдется такого термина S_1, что $Q \mathbf{a} S_1 \in \blacktriangle_2$, но найдется термин S_1 такой, что $Q \mathbf{a} S_1 \in \blacktriangle_2$. Тогда в качестве β выбираем $\alpha \cup \{Q^+\}$;

(c) в α не найдется такого термина S_1, что $Q \mathbf{a} S_1 \in \blacktriangle_2$ или $Q \mathbf{a} S_1 \in \blacktriangle_2$. Тогда в качестве β следует рассмотреть $\alpha \cup \{Q^-\}$.

Необходимые обоснования для каждого из перечисленных случаев можно извлечь из соответствующих фрагментов приведенных рассуждений, касающихся ситуации (**I**). **Лемма 4** *доказана.*

Лемма 5.

Пусть $\blacktriangle_1$ – **ОСФ**-*максимальное множество относительно списка терминов* $\{M_1,..., M_n\}$, *а* $\blacktriangle_2$ – **ОСФ**-*максимальное множество относительно списка терминов* $\{M_1,..., M_n, Q_1,..., Q_m\}$. *Пусть также* $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$. *Тогда для любого* $\blacktriangle_1$-*допустимого описания* α *найдется* $\blacktriangle_2$-*допустимое описание* β, *такое что* $\beta = \alpha \cup \{Q_1^0,..., Q_m^0\}$, где Q_i^0 есть или Q_i^+ или Q_i^-.

Лемма доказывается *m*-кратным применением **Леммы 4**.

Приступим к построению канонических моделей для максимальных множеств формул. Рассмотрим произвольное множество силлоги-

стических формул $\blacktriangle$, которое **ОСФ**-максимально относительно списка $\{M_1,..., M_n\}$. Ассоциируем с ним пару $\langle \mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle \rangle$, такую что $\mathbf{D}_\blacktriangle$ – множество всех $\blacktriangle$-допустимых описаний объекта, а $\varphi_\blacktriangle(Q) = \{\alpha$: α – $\blacktriangle$-допустимое описание и $Q^+ \in \alpha\}$. Из определения $\varphi_\blacktriangle$ в частности вытекает, что всем терминам, не входящим в список $\{M_1,..., M_n\}$, эта функция сопоставляет пустое множество. Пару $\langle \mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle \rangle$ будем называть *канонической моделью.*

Необходимо показать, что $\langle \mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle \rangle$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к моделям в семантике исчисления **ОСФ**. Очевидно, что $\varphi_\blacktriangle(Q) \subseteq \mathbf{D}_\blacktriangle$. Продемонстрируем непустоту $\mathbf{D}_\blacktriangle$.

Лемма 6.

Для любого множества формул $\blacktriangle$, **ОСФ**-*максимального относительно списка* $\{M_1,..., M_n\}$, *существует по крайней мере одно* $\blacktriangle$-*допустимое описание объекта* $\{M_1^0,..., M_n^0\}$.

Если формулы из $\blacktriangle$ содержат ровно один силлогистический термин M_1 (т.е. если $n = 1$), то, согласно **Утверждению 2**, множество элементарных формул из $\blacktriangle$ является одним из трех классов: $\{M_1 \mathbf{a} M_1, M_1 \mathbf{i} M_1, M_1 \mathbf{a} M_1\}$ или $\{M_1 \mathbf{a} M_1, M_1 \mathbf{e} M_1, M_1 \mathbf{i} M_1\}$ или $\{M_1 \mathbf{a} M_1, M_1 \mathbf{i} M_1, M_1 \mathbf{i} M_1\}$. Каждому из трех указанных типов $\blacktriangle$ соответствует непустое множество $\blacktriangle$-допустимых описаний: первому – $\{\{M_1^+\}\}$, второму – $\{\{M_1^-\}\}$, третьему – $\{\{M_1^+\}, \{M_1^-\}\}$.

Если $n > 1$, то рассмотрим сначала множество $\blacktriangle_1$ формул из $\blacktriangle$, не содержащих иных терминов, кроме M_1. Согласно **Утверждению 1**, $\blacktriangle_1$ является **ОСФ**-максимальным относительно списка $\{M_1\}$. Только что было доказано существование $\blacktriangle_1$-допустимого описания объекта. Рассмотрим какое-нибудь подобное описание α. В соответствии с **Леммой 5**, найдется описание $\alpha \cup \{M_2^0,..., M_n^0\}$, которое является $\blacktriangle$-допустимым. **Лемма 6** *доказана.*

Теперь мы в состоянии приступить к доказательству основной леммы о равносильности двух утверждений: о принадлежности формулы **ОСФ**-максимальному множеству и об истинности ее в канонической модели, ассоциированной с данным множеством.

Лемма 7.

Пусть $\blacktriangle$ – *произвольное множество формул,* **ОСФ**-*максимальное относительно списка терминов* $\{M_1,..., M_n\}$. *Пусть* **A** – *формула, не содержащая терминов, отличных от* $M_1,..., M_n$. *Тогда* $\mathbf{A} \in \blacktriangle$, *е.т.е.* $|\mathbf{A}|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$ *в модели* $\langle \mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle \rangle$.

Доказательство осуществляется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**. Базис индукции (**A** не содержит пропозициональных связок) включает 6 случаев (по количеству типов элементарных силлогистических формул в языке **ОСФ**).

I. A есть *SiP*.

Доказаем сначала, что $SiP \in \blacktriangle \mathrel{\dot{\supset}} |SiP|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в модели $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$.

Рассмотрим случай, когда *S* совпадает с *P*.

1.	$SiS \in \blacktriangle$	допущение
2.	Пусть $\blacktriangle_1$ – множество всех формул из $\blacktriangle$ не содержащих иных терминов, кроме *S*	
3.	$\{S^+\}$ $\blacktriangle_1$-допустимо	1; **Лемма 2**
4.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^+ \in \alpha)$	3, 2; **Лемма 5**
5.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (\alpha \in \varphi_\Delta(S))$	4; опр. φ_Δ
6.	$\varphi_\Delta(S) \neq \varnothing$	5
7.	$|SiS|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$	6; **И2**

Пусть теперь *S* не совпадает с *P*.

1.	$SiP \in \blacktriangle$	допущение
2.	Пусть $\blacktriangle_1$ – множество всех формул из $\blacktriangle$ не содержащих иных терминов, кроме *S* и *P*.	
3.	$\{S^+, P^+\}$ $\blacktriangle_1$-допустимо	1; **Лемма 3**
4.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^+ \in \alpha$ и $P^+ \in \alpha)$	2, 3; **Лемма 5**
5.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (\alpha \in \varphi_\Delta(S)$ и $\alpha \in \varphi_\Delta(P))$	4; опр. φ_Δ
6.	$\varphi_\Delta(S) \cap \varphi_\Delta(P) \neq \varnothing$	5
7.	$|SiP|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$	6; **И2**

Докажем обратное утверждение.

1.	$|SiP|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$	допущение
2.	$\varphi_\Delta(S) \cap \varphi_\Delta(P) \neq \varnothing$	1; **И2**
3.	$SiP \notin \blacktriangle$	допущение
4.	$\neg \exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^+ \in \alpha$ и $P^+ \in \alpha)$	3; опр. $\mathbf{D}_\Delta$ и $\blacktriangle$-доп. описания
5.	$\neg \exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (\alpha \in \varphi_\Delta(S)$ и $\alpha \in \varphi_\Delta(P))$	4; опр. φ_Δ
6.	$\varphi_\Delta(S) \cap \varphi_\Delta(P) = \varnothing$	5
7.	$SiP \in \blacktriangle$	2, 6; от противного

II. A есть *SjP*.
Рассмотрим случай, когда *S* совпадает с *P*.

1.	$SjS \in \blacktriangle$	допущение
2.	Пусть $\blacktriangle_1$ – множество всех формул из $\blacktriangle$, не содержащих иных терминов, кроме *S*.	
3.	$\{S^-\}$ $\blacktriangle_1$-допустимо	1; **Лемма 2**
4.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^- \in \alpha)$	3, 2; **Лемма 5**
5.	$\dot{\exists} \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^+ \notin \alpha)$	4; опр. описания объекта
6.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (\alpha \notin \varphi_\Delta(S))$	5; опр. φ_Δ
7.	$\varphi_\Delta(S) \neq \mathbf{D}_\Delta$	6
8.	$|SjS|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$	7; **И11**

Пусть теперь *S* не совпадает с *P*.

Докажем сначала, что $SjP \in \blacktriangle \mathrel{\dot{\supset}} |SjP|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$.

1.	$SjP \in \blacktriangle$	допущение
2.	Пусть $\blacktriangle_1$ – множество всех формул из $\blacktriangle$, не содержащих иных терминов, кроме *S* и *P*	
3.	$\{S^-, P^-\}$ $\blacktriangle_1$-допустимо	1; **Лемма 3**
4.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^- \in \alpha$ и $P^- \in \alpha)$	2, 3; **Лемма 5**
5.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^+ \notin \alpha$ и $P^+ \notin \alpha)$	4; опр. описания объекта
6.	$\exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (\alpha \notin \varphi_\Delta(S)$ и $\alpha \notin \varphi_\Delta(P))$	5; опр. φ_Δ
7.	$\varphi_\Delta(S) \cup \varphi_\Delta(P) \neq \mathbf{D}_\Delta$	6
8.	$|SjP|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$	7; **И11**

Докажем обратное утверждение.

1.	$|SjP|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$	допущение
2.	$\varphi_\Delta(S) \cup \varphi_\Delta(P) \neq \mathbf{D}_\Delta$	2; **И11**
3.	$SjP \notin \blacktriangle$	допущение
4.	$\neg \exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^- \in \alpha$ и $P^- \in \alpha)$	3; опр. $\mathbf{D}_\Delta$ и $\blacktriangle$-доп. описания
5.	$\neg \exists \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^+ \notin \alpha$ и $P^+ \notin \alpha)$	4; опр. опис. объекта
6.	$\dot{\forall} \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (S^+ \in \alpha$ или $P^+ \in \alpha)$	5
7.	$\dot{\forall} \alpha \in \mathbf{D}_\Delta (\alpha \in \varphi_\Delta(S)$ или $\alpha \in \varphi_\Delta(P))$	6; опр. φ_Δ
8.	$\varphi_\Delta(S) \cup \varphi_\Delta(P) = \mathbf{D}_\Delta$	7
9.	$SjP \in \blacktriangle$	2, 8; от противного

III. A есть *SoP*.

Докажем сначала, что $SoP \in \blacktriangle \mathrel{\dot{\supset}} |SoP|_{\varphi\Delta} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta \rangle$.

1.	$SoP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$SoP \equiv \neg SaP \in \blacktriangle$	**ОСФ13**

3.	$SaP \notin \blacktriangle$	2, 1
4.	$SaS \in \blacktriangle$	**ОСФ7**
5.	S не совпадает с P	3, 4
6.	Пусть $\blacktriangle_1$ – множество всех формул из $\blacktriangle$, не содержащих иных терминов, кроме S и P.	
7.	$\{S^+, P^-\}$ $\blacktriangle_1$-допустимо	1, 5; **Лемма 3**
8.	$\exists\alpha\in\mathbf{D}_\Delta\ (S^+\in\alpha$ и $P^-\in\alpha)$	6, 7; **Лемма 5**
9.	$\exists\alpha\in\mathbf{D}_\Delta\ (S^+\in\alpha$ и $P^+\notin\alpha)$	8; опр. опис. объекта
10.	$\exists\alpha\in\mathbf{D}_\Delta\ (\alpha\in\varphi_\Delta(S)$ и $\alpha\notin\varphi_\Delta(P))$	9; опр. φ_Δ
11.	$\varphi_\Delta(S)\setminus\varphi_\Delta(P)\neq\varnothing$	10
12.	$\lvert SoP\rvert_{\varphi\Delta}=\mathbf{1}$ в $\langle\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta\rangle$	11; **И4**

Докажем обратное утверждение.

1.	$\lvert SoP\rvert_{\varphi\Delta}=\mathbf{1}$ в $\langle\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta\rangle$	допущение
2.	$\varphi_\Delta(S)\setminus\varphi_\Delta(P)\neq\varnothing$	2; **И4**
3.	$SoP\notin\blacktriangle$	допущение
4.	$\neg\exists\alpha\in\mathbf{D}_\Delta\ (S^+\in\alpha$ и $P^-\in\alpha)$	3; опр. $\mathbf{D}_\Delta$ и $\blacktriangle$-доп. описания
5.	$\neg\exists\alpha\in\mathbf{D}_\Delta\ (S^+\in\alpha$ и $P^+\notin\alpha)$	4; опр. опис. объекта
6.	$\neg\exists\alpha\in\mathbf{D}_\Delta\ (\alpha\in\varphi_\Delta(S)$ и $\alpha\notin\varphi_\Delta(P))$	5; опр. φ_Δ
7.	$\varphi_\Delta(S)\setminus\varphi_\Delta(P)=\varnothing$	6
8.	$SoP\in\blacktriangle$	2, 7; от противного

IV. **A** есть *SeP*. **V**. **A** есть *SiP*. **VI**. **A** есть *SaP*.

Эти случаи сводятся, соответственно, к случаям **I**, **II**, **III** в силу условий истинности **И3**, **И10**, **И1** и наличия в $\blacktriangle$ аксиом **ОСФ12**, **ОСФ14**, **ОСФ13** системы **ОСФ**.

Индуктивный переход обосновывается тривиальным образом. **Лемма 7** *доказана*.

Метатеорема 2.
Всякая **ОСФ**-*общезначимая формула доказуема в исчислении* **ОСФ**.

Рассмотрим произвольную **ОСФ**-общезначимую формулу **A** данного силлогистического языка. Допустим, что она не теорема **ОСФ**. Тогда и формула $\neg\neg$**A** не доказуема в этой системе. Это означает, что множество $\{\neg$**A**$\}$ **ОСФ**-непротиворечиво. Список **T** универсалий в составе $\neg$**A** конечен. Согласно **Лемме 1**, $\{\neg$**A**$\}$ можно расширить до **ОСФ**-максимального относительно **T** множества формул $\blacktriangle$. Ассоциируем с ним каноническую модель $\langle\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta\rangle$. В силу

Леммы 7, всякая формула, не содержащая иных терминов, кроме входящих в список **T**, принадлежит $\blacktriangle$, *е.т.е.* эта формула истинна в модели $\langle\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta\rangle$. Поскольку $\neg$**A** $\in\blacktriangle$, постольку $\lvert\neg\mathbf{A}\rvert_{\varphi\Delta}=\mathbf{1}$ в модели $\langle\mathbf{D}_\Delta,\varphi_\Delta\rangle$. Отсюда следует, что формула **A** ложна в данной модели. Поэтому **A** не является **ОСФ**-общезначимой формулой. В рассуждении получено противоречие. Следовательно, формула **A** доказуема в **ОСФ**. **Метатеорема 2** *доказана*.

Итак, мы показали адекватность построенной нами семантики системе **ОСФ** обобщенной позитивной фундаментальной силлогистики. Отсюда, как было сказано в начале данного параграфа, вытекает погружаемость этой системы в классическое одноместное исчисление предикатов посредством функции * – стандартного, «фундаментального» перевода силлогистических формул, расширенного относительно выражений видов *SaP* и *SjP*, специфичных именно для обобщенной силлогистики, которые содержат информацию о наличии между объемами универсалий *S* и *P* базисных отношений исчерпываемости и неисчерпываемости универсума:

Метатеорема 3.
*Обобщенный перевод * погружает систему* **ОС4** *в исчисление предикатов*.

§ 3. Позитивные силлогистики $\mathbf{C1^+}$ и $\mathbf{C3^+}$

В первой главе было указано, что В.А. Смирновым [59] сформулированы четыре аксиоматические системы чистой позитивной силлогистики, в которых доказуемы аналоги всех 24 правильных модусов категорического силлогизма, принципов обращения и законов логического квадрата. Это системы **С1-С4**. Одновременно с этим было отмечено, что рекурсивные функции, сопоставляющие формулам силлогистического языка формулы языка логики предикатов, предложенные В.А. Смирновым для систем **С1** и **С3**, не является погружающими, и ставилась задача нахождения таких их расширений – систем $\mathbf{C1^+}$ и $\mathbf{C3^+}$, которые погружались бы в исчисление предикатов посредством данных переводов.

Напомним, что система **С1**, дедуктивно эквивалентная силлогистике Е. Слупецкого, содержит следующие постулаты (дается общая нумерация аксиом для всех систем **С1-С4** с учетом нумерации аксиом систем **С2** и **С4**, приведенной ранее в §4 Главы III):

А0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

A1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$, **A4**. $SaP \supset SiP$,
A2. $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$, **A6**. $SeP \equiv \neg SiP$,
A3. $SeP \supset PeS$, **A7**. $SoP \equiv \neg SaP$,
R1. *modus ponens*.

Система **С3** В.А. Смирнова получается из **С1** за счет добавления схемы аксиом

A8. SiS.

Перевод $^{\bullet}$ В.А. Смирнова, предназначавшийся им для системы **С1**, определяется следующим образом:

$$SaP^{\bullet} = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists x\neg Px,$$
$$SeP^{\bullet} = \forall x(Sx \supset \neg Px),$$
$$SiP^{\bullet} = \exists x(Sx \,\&\, Px),$$
$$SoP^{\bullet} = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px,$$
$$(\neg\mathbf{A})^{\bullet} = \neg(\mathbf{A}^{\bullet}), \qquad (\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B})^{\bullet} = \mathbf{A}^{\bullet} \triangledown \mathbf{B}^{\bullet}.$$

Для системы **С3** В.А. Смирнов предложил следующий перевод $^{+}$:

$$SaP^{+} = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists x\neg Px,$$
$$SeP^{+} = \forall x(Sx \supset \neg Px) \,\&\, \exists xSx \,\&\, \exists xPx,$$
$$SiP^{+} = \exists x(Sx \,\&\, Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists xPx,$$
$$SoP^{+} = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg\exists xSx \vee \neg\exists x\neg Px,$$
$$(\neg\mathbf{A})^{+} = \neg(\mathbf{A}^{+}), \qquad (\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B})^{+} = \mathbf{A}^{+} \triangledown \mathbf{B}^{+}.$$

Основная трудность в формализации силлогистик, в которых категорические высказывания трактуются в духе переводов $^{\bullet}$ и $^{+}$, состоит в том, что в них фигурируют формулы $\exists x\neg Sx$ и $\neg\exists x\neg Sx$, несущие информацию о неуниверсальности и универсальности термина S, а подобная информация невыразима в рамках известных стандартных систем чистой позитивной силлогистики. Поэтому для преодоления указанной трудности может быть использована система обобщенной фундаментальной силлогистики (исчисление **ОСФ**).

Исчисление **ОСФ** использовалось В.И. Маркиным [39] в качестве «промежуточной» системы при доказательстве погружаемости силлогистик **С1**$^{+}$ и **С3**$^{+}$ в исчисление предикатов посредством переводов В.А. Смирнова. Идея этого доказательства состоит в предварительной демонстрации погружаемости указанных силлогистик в **ОСФ**, причем погружающие операции выбираются таким образом, что их композиция с фундаментальным переводом * оказывается равносильной в исчислении предикатов функциям $^{\bullet}$ и $^{+}$.

***Система* С1**$^{+}$

Система позитивной силлогистики **С1**$^{+}$, адекватная переводу $^{\bullet}$, в качестве дедуктивных постулатов имеет все схемы аксиом системы **С1**, единственное правило вывода *modus ponens*, а также дополнительные схемы аксиом:

A9. $SaP \supset (SaS \,\&\, PaP)$, **A11**. $(SeP \,\&\, PiP \,\&\, PoP) \supset SeS$.
A10. $SiP \supset SiS$,

Данное исчисление в несколько иной формулировке впервые представлено в работе Л.И. Мчедлишвили [50].

Сформулируем перевод ρ_1 из **С1**$^{+}$ в **ОСФ** такой, что выражение $\rho_1(\mathbf{A})^{*}$ для любой силлогистической формулы **A** эквивалентно в исчислении предикатов формуле $\mathbf{A}^{\bullet}$:

$$\rho_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS \,\&\, PjP, \qquad \rho_1(SeP) = SeP,$$
$$\rho_1(SiP) = SiP, \qquad \rho_1(SoP) = SoP \vee SeS \vee PaP,$$
$$\rho_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\rho_1(\mathbf{A}), \qquad \rho_1(\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B}) = \rho_1(\mathbf{A}) \triangledown \rho_1(\mathbf{B}).$$

Метатеорема 4.

Перевод ρ_1 *погружает* **С1**$^{+}$ *в* **ОСФ**.

Покажем сначала, что перевод ρ_1 удовлетворяет первой части критерия В.А. Смирнова.

ρ_1-переводы аксиом **С1**$^{+}$ видов **A0**, **A3** и **A10** являются аксиомами **ОСФ0**, **ОСФ5** и **ОСФ8** системы **ОСФ**. ρ_1-переводы **A1**, **A2** и **A6** доказуемы в **ОСФ** с использованием **ОСФ1**, **ОСФ2** и **ОСФ12**, соответственно, и законов логики высказываний. Перевод **A7** доказуем с использованием **ОСФ12**, **ОСФ13** и **ОСФ14**. Остается доказать в **ОСФ** ρ_1-переводы **A4**, **A9** и **A11**.

A4. $\rho_1(SaP \supset SiP) = (SaP \,\&\, SiS \,\&\, PjP) \supset SiP$.

1.	$(PeS \,\&\, SaP) \supset SeS$	**ОСФ2**
2.	$SeP \supset PeS$	**ОСФ5**
3.	$SiP \equiv \neg SeP$	**ОСФ12**
4.	$(\neg SiP \,\&\, SaP) \supset SeS$	1, 2, 3; **ЛВ**
5.	$SiS \equiv \neg SeS$	**ОСФ12**
6.	$(SaP \,\&\, SiS) \supset SiP$	4, 5; **ЛВ**
7.	$(SaP \,\&\, SiS \,\&\, PjP) \supset SiP$	6; **ЛВ**

A9. $\rho_1(SaP \supset (SaS \,\&\, PaP)) = (SaP \,\&\, SiS \,\&\, PjP) \supset$
$(SaS \,\&\, SiS \,\&\, SjS \,\&\, PaP \,\&\, PiP \,\&\, PjP)$.

1.	$(PeP \,\&\, SaP) \supset SeP$	**ОСФ2**
2.	$SeP \supset PeS$	**ОСФ5**
3.	$(PeS \,\&\, SaP) \supset SeS$	**ОСФ2**
4.	$(PeP \,\&\, SaP) \supset SeS$	1, 2, 3; **ЛВ**
5.	$PiP \equiv \neg PeP$	**ОСФ12**
6.	$SiS \equiv \neg SeS$	**ОСФ12**
7.	$(SaP \,\&\, SiS) \supset PiP$	4, 5, 6; **ЛВ**
8.	$(SaP \,\&\, SuS) \supset SuP$	**ОСФ3**
9.	$SuP \supset PuS$	**ОСФ6**
10.	$(SaP \,\&\, PuS) \supset PuP$	**ОСФ3**
11.	$(SaP \,\&\, SuS) \supset PuP$	8, 9, 10; **ЛВ**
12.	$SjS \equiv \neg SuS$	**ОСФ14**
13.	$PjP \equiv \neg PuP$	**ОСФ14**
14.	$(SaP \,\&\, PjP) \supset SjS$	11, 12, 13; **ЛВ**
15.	SaS	**ОСФ7**
16.	PaP	**ОСФ7**
17.	$(SaP \,\&\, SiS \,\&\, PjP) \supset (SaS \,\&\, SiS \,\&\, SjS \,\&\, PaP \,\&\, PiP \,\&\, PjP)$	7, 14, 15, 16; **ЛВ**

А11. $\rho_1((SeP \,\&\, PiP \,\&\, PoP) \supset SeS) =$
$(SeP \,\&\, PiP \,\&\, (PoP \vee PeP \vee PuP)) \supset SeS$.

1.	PaP	**ОСФ7**
2.	$PoP \equiv \neg PaP$	**ОСФ13**
3.	$\neg(SeP \,\&\, PiP \,\&\, PoP)$	1, 2; **ЛВ**
4.	$(SeP \,\&\, PiP \,\&\, PoP) \supset SeS$	3; **ЛВ**
5.	$PiP \equiv \neg PeP$	**ОСФ12**
6.	$\neg(SeP \,\&\, PiP \,\&\, PeP)$	5; **ЛВ**
7.	$(SeP \,\&\, PiP \,\&\, PeP) \supset SeS$	6; **ЛВ**
8.	$(PuP \,\&\, SeP) \supset SaP$	**ОСФ4**
9.	$SeP \supset PeS$	**ОСФ5**
10.	$(PeS \,\&\, SaP) \supset SeS$	**ОСФ2**
11.	$(SeP \,\&\, PiP \,\&\, PuP) \supset SeS$	8, 9, 10; **ЛВ**
12.	$(SeP \,\&\, PiP \,\&\, (PoP \vee PeP \vee PuP)) \supset SeS$	4, 7, 11; **ЛВ**

Из определения ρ_1 следует, что если $\rho_1(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\rho_1(\mathbf{A})$ доказуемы в **ОСФ**, то $\rho_1(\mathbf{B})$ также доказуема в этой системе. Первая часть доказательства **Метатеоремы 4** завершена.

В качестве обратного перевода из **ОСФ** в **С1*** рассмотрим функцию ρ_2:

$\rho_2(SaP) = SaP \vee SeS \vee (PiP \,\&\, PoP)$,
$\rho_2(SeP) = SeP$,
$\rho_2(SiP) = SiP$,
$\rho_2(SoP) = SoP \,\&\, SiS \,\&\, (PeP \vee PaP)$,
$\rho_2(SuP) = (SiS \,\&\, SoS) \vee (PiP \,\&\, PoP)$,
$\rho_2(SjP) = (SeS \vee SaS) \,\&\, (PeP \vee PaP)$,
$\rho_2(\neg \mathbf{A}) = \neg \rho_2(\mathbf{A})$,
$\rho_2(\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B}) = \rho_2(\mathbf{A}) \triangledown \rho_2(\mathbf{B})$.

Перевод ρ_2 играет чисто вспомогательную роль и, конечно же, не является погружающей операцией. Покажем, что он удовлетворяет второй части критерия В.А. Смирнова.

ρ_2-переводы аксиом **ОСФ0**, **ОСФ6**, **ОСФ9**, **ОСФ10** и **ОСФ11** являются пропозициональными тавтологиями. ρ_2-переводы **ОСФ5** и **ОСФ8** совпадают с аксиомами **А3** и **А10**. Перевод аксиомы **ОСФ4** доказывается с помощью **А11**, перевод **ОСФ12** – с помощью **А6**, а переводы **ОСФ13** и **ОСФ14** – с помощью **А6** и **А7**. Остается доказать в системе **С1*** ρ_2-переводы **ОСФ1**, **ОСФ2**, **ОСФ3**, **ОСФ7** и **ОСФ15**.

ОСФ1. $\rho_2((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP) = ((MaP \vee MeM \vee (PiP \,\&\, PoP)) \,\&\, (SaM \vee SeS \vee (MiM \,\&\, MoM))) \supset (SaP \vee SeS \vee (PiP \,\&\, PoP))$.

1.	$(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$	**А1**
2.	$MaP \supset (MaM \,\&\, PaP)$	**А9**
3.	$MoM \equiv \neg MaM$	**А7**
4.	$\neg(MaP \,\&\, MiM \,\&\, MoM)$	2, 3; **ЛВ**
5.	$SaM \supset SiM$	**А4**
6.	$SiM \supset MiS$	теорема **С1*** (выводится из **А3** и **А6**)
7.	$MiS \supset MiM$	**А10**
8.	$MeM \equiv \neg MiM$	**А6**
9.	$\neg(MeM \,\&\, SaM)$	5, 6, 7, 8; **ЛВ**
10.	$\neg(MeM \,\&\, MiM \,\&\, MoM)$	8; **ЛВ**
11.	$\rho_2((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP)$	1, 4, 9, 10; **ЛВ**

ОСФ2. $\rho_2((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, (SaM \vee SeS \vee (MiM \,\&\, MoM))) \supset SeP$.

1.	$(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$	**А2**
2.	$SeS \supset SeP$	теорема **С1*** (выводится из **А10**, **А6**)

3. $MeP \supset PeM$ **А3**
4. $(PeM \,\&\, MiM \,\&\, MoM) \supset PeP$ **А11**
5. $PeP \supset SeP$ теорема **С1⁺** (выводится из **А10**, **А6**, **А3**)
6. $(MeP \,\&\, MiM \,\&\, MoM) \supset SeP$ 3, 4, 5; **ЛВ**
7. $\rho_2((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP)$ 1, 2, 6; **ЛВ**

ОСФ3. $\rho_2((MaP \,\&\, SuM) \supset SuP) = ((MaP \vee MeM \vee (PiP \,\&\, PoP)) \,\&\, ((SiS \,\&\, SoS) \vee (MiM \,\&\, MoM))) \supset ((SiS \,\&\, SoS) \vee (PiP \,\&\, PoP))$.

1. $MaP \supset (MaM \,\&\, PaP)$ **А9**
2. $MoM \equiv \neg MaM$ **А7**
3. $\neg(MaP \,\&\, MiM \,\&\, MoM)$ 1, 2; **ЛВ**
4. $MeM \equiv \neg MiM$ **А6**
5. $\neg(MeM \,\&\, MiM \,\&\, MoM)$ 4; **ЛВ**
6. $\rho_2((MaP \,\&\, SuM) \supset SuP)$ 3, 5; **ЛВ**

ОСФ7. $\rho_2(SaS) = SaS \vee SeS \vee (SiS \,\&\, SoS)$.

1. $SeS \equiv \neg SiS$ **А6**
2. $SoS \equiv \neg SaS$ **А6**
3. $SaS \vee SeS \vee (SiS \,\&\, SoS)$ 1, 2; **ЛВ**

ОСФ15. $\rho_2(SiS \vee SjS) = SiS \vee ((SeS \vee SaS) \,\&\, (SeS \vee SaS))$.

1. $SeS \equiv \neg SiS$ **А6**
2. $SiS \vee SeS$ 1; **ЛВ**
3. $SiS \vee ((SeS \vee SaS) \,\&\, (SeS \vee SaS))$ 2; **ЛВ**

Из определения ρ_2 следует, что если $\rho_2(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\rho_2(\mathbf{A})$ доказуемы в **С1⁺**, то $\rho_2(\mathbf{B})$ также доказуема в этой системе.

Завершив доказательство второй части критерия В.А. Смирнова, приступим к демонстрации справедливости третьей части применительно к функциям ρ_1 и ρ_2. Индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **А** языка **С1⁺** покажем, что теоремой этой системы является $\mathbf{A} \equiv \rho_2(\rho_1(\mathbf{A}))$.

В случае, когда $\mathbf{A} = SaP$, $\rho_2(\rho_1(\mathbf{A})) = (SaP \vee SeS \vee (PiP \,\&\, PoP)) \,\&\, SiS \,\&\, (PeP \vee PaP) \,\&\, (PeP \vee PaP)$.

1. $SeS \equiv \neg SiS$ **А6**
2. $PeP \equiv \neg PiP$ **А6**
3. $PoP \equiv \neg PaP$ **А7**
4. $\rho_2(\rho_1(\mathbf{A})) \supset SaP$ 1, 2, 3; **ЛВ**
5. $SaP \supset SiP$ **А4**

6. $SiP \supset SiS$ **А10**
7. $SaP \supset SiS$ 5, 6; **ЛВ**
8. $SaP \supset PaP$ из **А9**
9. $SaP \supset \rho_2(\rho_1(\mathbf{A}))$ 7, 8; **ЛВ**
10. $SaP \equiv \rho_2(\rho_1(\mathbf{A}))$ 4, 9; **ЛВ**

Случай, когда $\mathbf{A} = SoP$, сводится к только что рассмотренному в силу аксиомы **А7** – $SoP \equiv \neg SaP$. В случаях, когда **А** имеет иной вид, доказательство тривиально.

Таким образом, все три части критерия В.А. Смирнова выполняются. **Метатеорема 4** *доказана*.

Теперь мы в состоянии продемонстрировать адекватность системы **С1⁺** первому переводу В.А. Смирнова (переводу *).

Метатеорема 5.
Функция * погружает силлогистику **С1⁺** *в исчисление предикатов.*

Из только что доказанного утверждения о погружаемости **С1⁺** в **ОСФ** посредством ρ_1 и того факта, что функция * погружает **ОСФ** в исчисление предикатов вытекает: произвольная формула **А** стандартного языка позитивной силлогистики доказуема в системе **С1⁺** тогда и только тогда, когда $\rho_1(\mathbf{A})^*$ является теоремой исчисления предикатов. Индукцией по числу пропозициональных связок в составе **А** несложно продемонстрировать доказуемость в исчислении предикатов формулы $\mathbf{A}^* \equiv \rho_1(\mathbf{A})^*$ для произвольной формулы **А**. **Метатеорема 5** *доказана*.

Система С3⁺

Перейдем теперь к формулировке позитивной силлогистики, адекватной другому переводу В.А. Смирнова – переводу $^+$. Рассмотрим систему **С3⁺**, которая получается из **С1⁺** отбрасыванием схем **А10** и **А11** и добавлением новой схемы аксиом:

А12. $SeP \supset SaS$.

Данное исчисление было впервые сформулировано Л.И. Мчедлишвили [50] и представляет собой расширение силлогистики **С3** В.А. Смирнова, поскольку аксиомы последней **А1-А4, А6-А7** являются также аксиомами **С3⁺**, а **А8** – закон силлогистического тождества SiS – теоремой данной системы:

1. $SeS \equiv \neg SiS$ **А6**
2. $SeS \supset SaS$ **А12**

3.	$SaS \supset SiS$	**А4**
4.	SiS	1, 2, 3; **ЛВ**

Кроме того, **С3**$^{+}$ содержит все теоремы системы **С1**$^{+}$: аксиомы **А10** и **А11** в ней доказуемы.

Как и раньше, для доказательства погружаемости **С3**$^{+}$ в исчисление предикатов зададим предварительно перевод (назовем его μ_1) из этой системы в обобщенную фундаментальную силлогистику; его композиция с функцией * должна быть равносильной переводу * В.А. Смирнова:

$\mu_1(SaP) = SaP \;\&\; SiS \;\&\; PjP$, $\quad\mu_1(SeP) = SeP \;\&\; SiS \;\&\; PiP$,
$\mu_1(SiP) = SiP \vee SeS \vee PeP$, $\quad\mu_1(SoP) = SoP \vee SeS \vee PuP$,
$\mu_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\mu_1(\mathbf{A})$, $\quad\mu_1(\mathbf{A} \mathbin{\nabla} \mathbf{B}) = \mu_1(\mathbf{A}) \mathbin{\nabla} \mu_1(\mathbf{B})$.

Метатеорема 6.

Перевод μ_1 погружает **С3**$^{+}$ *в* **ОСФ**.

Покажем, что μ_1-переводы всех теорем **С3**$^{+}$ доказуемы в **ОСФ**. Переводы аксиом **А0**, **А1**, **А2**, **А3** и **А6** доказуемы с использованием аксиом **ОСФ0**, **ОСФ1**, **ОСФ2**, **ОСФ5** и **ОСФ12**, соответственно. Перевод **А7** доказуем посредством **ОСФ12**, **ОСФ13** и **ОСФ14**. Перевод **А4** непосредственно выводится из теоремы **ОСФ** $(SaP \;\&\; SiS \;\&\; PjP) \supset SiP$, ее доказательство содержится в пункте **А4 Метатеоремы 4**. μ_1-перевод аксиомы **А9** совпадает с ее ρ_1-переводом и доказан в **ОСФ** ранее (пункт **А9 Метатеоремы 4**). Правило *modus ponens* сохраняет доказуемость μ_1-переводов. Остается доказать в обобщенной фундаментальной силлогистике μ_1-перевод новой аксиомы **А12**:

А12. $\mu_1(SeP \supset SaS) = (SeP \;\&\; SiS \;\&\; PiP) \supset (SaS \;\&\; SiS \;\&\; SjS)$.

1.	$(SeP \;\&\; PaS) \supset PeP$	**ОСФ2**
2.	$PoS \equiv \neg PaS$	**ОСФ13**
3.	$PiP \equiv \neg PeP$	**ОСФ12**
4.	$(SeP \;\&\; PiP) \supset PoS$	1, 2, 3; **ЛВ**
5.	$PoS \supset SjS$	**ОСФ11**
6.	SaS	**ОСФ7**
7.	$(SeP \;\&\; SiS \;\&\; PiP) \supset (SaS \;\&\; SiS \;\&\; SjS)$	4, 5, 6; **ЛВ**

В качестве обратного перевода из **ОСФ** в **С3**$^{+}$ рассмотрим функцию ρ_2, заданную при доказательстве **Метатеоремы 4**. Выше было показано, что ρ_2-переводы всех теорем **ОСФ** доказуемы в **С1**$^{+}$. Но поскольку **С1**$^{+}$ является подсистемой **С3**$^{+}$, они доказуемы и в ней.

Остается продемонстрировать эквивалентность в **С3**$^{+}$ произвольной формулы **А** и $\rho_2(\mu_1(\mathbf{A}))$. В случае, когда **А** имеет вид SaP, верно, что $\rho_2(\mu_1(\mathbf{A}))$ графически совпадает с $\rho_2(\rho_1(\mathbf{A}))$. Формула $SaP \equiv \rho_2(\rho_1(SaP))$ была доказана ранее в **С1**$^{+}$, она является также теоремой и более сильной системы **С3**$^{+}$. Пусть $\mathbf{A} = SeP$. Тогда $\rho_2(\mu_1(\mathbf{A})) = \rho_2(SeP \;\&\; SiS \;\&\; PiP) = SeP \;\&\; SiS \;\&\; PiP$. Формула $SeP \equiv SeP \;\&\; SiS \;\&\; PiP$ доказывается с использованием закона силлогистического тождества для частноутвердительных высказываний, который, как было показано ранее, является теоремой **С3**$^{+}$. Разбор остальных случаев тривиален.

Итак, все три части критерия погружаемости В.А. Смирнова выполняются, и **Метатеорема 6** *доказана*.

Из данной теоремы, погружаемости системы **ОСФ** в исчисление предикатов посредством функции * и того факта, что для любой силлогистической формулы **А** в исчислении предикатов доказуемо $\mathbf{A}^{*} \equiv \mu_1(\mathbf{A})^{*}$, вытекает справедливость следующего утверждения:

Метатеорема 7.

Функция * *погружает силлогистику* **С3**$^{+}$ *в исчисление предикатов.*

Силлогистика **С3**$^{+}$ имеет одну интересную особенность. В.И. Маркиным в монографии [36] (где эта система фигурирует под названием **С3.1**) была продемонстрирована ее погружаемость в исчисление предикатов посредством функции, отличающейся от * трактовкой элементарных формул типов ***a*** и ***o***:

$SaP \rightarrow \forall x(S(x) \supset P(x)) \;\&\; \exists x S(x)$,
$SoP \rightarrow \exists x(S(x) \;\&\; \neg P(x)) \vee \neg\exists x S(x)$.

Данная трактовка SaP и SoP характерна для силлогистики **С2** В.А. Смирнова. Таким образом, у системы **С3**$^{+}$, так же как и у силлогистики Лукасевича, имеются неэквивалентные друг другу адекватные интерпретации в классической логике предикатов.

§ 4. Обобщенная позитивная силлогистика ОС3^{+}

В §2 этой главы было сформулировано обобщение в языке с константами ***a***, ***i***, ***e***, ***o***, ***u*** и ***j*** фундаментальной позитивной силлогистики. Аналогичная работа может быть проделана и для других систем чистой позитивной силлогистики. В данном параграфе будет предложено расширение только что рассмотренной позитивной силлогистики **С3**$^{+}$ – исчисления **ОС3**$^{+}$ – в языке обобщенной позитивной силлогистики.

Возникает вопрос об условиях истинности и ложности новых типов формул – SuP и SjP – в силлогистике, базирующейся на **С3**$^{+}$. В соответствии с переводом *, погружающим **С3**$^{+}$ в исчисление предикатов, общие высказывания данной системы предполагают непустоту и неуниверсальность своих терминов. В силу того, что SuP также естественно рассматривать как общее высказывание, его можно трактовать как утверждение о том, что объединение объемов непустых и неуниверсальных терминов S и P совпадает с универсумом. Что же касается SjP, то оно должно быть истинным в том и только в том случае, когда ложно SuP.

Доопределим в соответствии с указанной трактовкой функцию *:

$SuP^{*} = \forall x(\neg Sx \supset Px) \,\&\, \exists x \neg Sx \,\&\, \exists x \neg Px$,
$SjP^{*} = \exists x(\neg Sx \,\&\, \neg Px) \vee \neg \exists x \neg Sx \vee \neg \exists x \neg Px$.

Теперь функция * переводит на язык логики предикатов формулы языка обобщенной позитивной силлогистики.

Обобщенная позитивная силлогистика, соответствующая расширенному переводу *, была аксиоматизирована В.И. Маркиным в [46]. Схемами аксиом системы **ОС3**$^{+}$ являются:

ОС3^{+}0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,
ОС3^{+}1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$, **ОС3^{+}8**. $SeP \supset SaS$,
ОС3^{+}2. $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$, **ОС3^{+}9**. $SuP \supset SaS$,
ОС3^{+}3. $(MaP \,\&\, SuM) \supset SuP$, **ОС3^{+}10**. SiS,
ОС3^{+}4. $(MuP \,\&\, SeM) \supset SaP$, **ОС3^{+}11**. SjS,
ОС3^{+}5. $SeP \supset PeS$, **ОС3^{+}12**. $SiP \equiv \neg SeP$,
ОС3^{+}6. $SuP \supset PuS$, **ОС3^{+}13**. $SoP \equiv \neg SaP$,
ОС3^{+}7. $SaP \supset (SaS \,\&\, PaP)$, **ОС3^{+}14**. $SjP \equiv \neg SuP$.

Единственное правило вывода в **ОС3**$^{+}$ – *modus ponens*.

Система **ОС3**$^{+}$ по классу доказуемых формул действительно является расширением чистой позитивной силлогистики **С3**$^{+}$. Схемы аксиом **А1-А3**, **А6**, **А7**, **А9** и **А12** системы **С3**$^{+}$, а также единственное ее правило вывода *modus ponens* входят в число дедуктивных постулатов обобщенной силлогистики **ОС3**$^{+}$. Аксиомы единственной оставшейся схемы **А4** системы **С3**$^{+}$, имеющие вид $SaP \supset SiP$, доказуемы в **ОС3**$^{+}$:

1.	$(PeS \,\&\, SaP) \supset SeS$	**ОС3^{+}2**
2.	$SeP \supset PeS$	**ОС3^{+}5**
3.	$SiP \equiv \neg SeP$	**ОС3^{+}12**
4.	$SiS \equiv \neg SeS$	**ОС3^{+}12**
5.	$(\neg SiP \,\&\, SaP) \supset \neg SiS$	1, 2, 3, 4; **ЛВ**
6.	SiS	**ОС3^{+}10**
7.	$SaP \supset SiP$	5, 6; **ЛВ**

Что же касается соотношения между классами теорем систем обобщенной силлогистики **ОС3**$^{+}$ и **ОСФ**, то они перекрещиваются: у этих систем есть одинаковые аксиомы, некоторые законы **ОСФ** не доказуемы в **ОС3**$^{+}$ (например, SaS), а некоторые законы **ОС3**$^{+}$ не доказуемы в **ОСФ** (например, SiS).

Доказательство погружаемости системы **ОС3**$^{+}$ в классическое исчисление предикатов посредством вышеуказанного обобщения перевода * В.А. Смирнова, представленное В.И. Маркиным в [46], осуществляется тем же методом, который применялся в предыдущем параграфе при доказательстве погружаемости в исчисление предикатов системы чистой позитивной силлогистики **С3**$^{+}$. Обобщенная фундаментальная силлогистика **ОСФ** снова используется в качестве «промежуточной» системы: предварительно демонстрируется погружаемость **ОС3**$^{+}$ в **ОСФ**, причем погружающая операция выбирается таким образом, что ее композиция с «фундаментальным» переводом * оказывается равносильной в исчислении предикатов функции *.

Искомый перевод из **ОС3**$^{+}$ в **ОСФ** является обобщением перевода μ_1 из **С3**$^{+}$ в **ОСФ**. Доопределяем его с учетом наличия в языке обобщенной силлогистики формул с константами u и j:

$\mu_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS \,\&\, PjP$, $\mu_2(SiP) = SiP \vee SeS \vee PeP$,
$\mu_1(SeP) = SeP \,\&\, SiS \,\&\, PiP$, $\mu_2(SoP) = SoP \vee SeS \vee PuP$,
$\mu_1(SuP) = SuP \,\&\, SjS \,\&\, PjP$, $\mu_2(SjP) = SjP \vee SuS \vee PuP$,
$\mu_1(\neg \mathbf{A}) = \neg \mu_1(\mathbf{A})$, $\mu_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \mu_1(\mathbf{A}) \nabla \mu_1(\mathbf{B})$.

Метатеорема 8.

Обобщенный перевод μ_2 *погружает* **ОС3**$^{+}$ *в* **ОСФ**.

В процессе доказательства используем многократно примененный ранее критерий погружаемости В.А. Смирнова.

Покажем сначала, что операция μ_2 удовлетворяет первой части критерия В.А. Смирнова: μ_2-переводы всех теорем **ОС3**$^{+}$ доказуемы в системе **ОСФ**.

Для всех аксиом **ОС3^{+}0** справедливость этого утверждения очевидна. В силу доказанной в предыдущем параграфе **Метатеоремы 5** оно справедливо также и для всех теорем **С3**$^{+}$, в том числе аксиом **ОС3^{+}1**, **ОС3^{+}2**, **ОС3^{+}5**, **ОС3^{+}7**, **ОС3^{+}8**, **ОС3^{+}10**, **ОС3^{+}12**, **ОС3^{+}13**.

μ_1-переводы аксиом **ОС3$^+$3**, **ОС3$^+$4** и **ОС3$^+$6** выводятся в системе **ОСФ** непосредственно из соответствующих аксиом **ОСФ3**, **ОСФ4** и **ОСФ6**.

ОС3$^+$9. $\mu_1(SuP \supset SaS) = (SuP \,\&\, SjS \,\&\, PjP) \supset (SaS \,\&\, SiS \,\&\, SjS)$.

1.	$(SuP \,\&\, SeS) \supset SaP$	**ОСФ4**
2.	$SuP \supset PuS$	**ОСФ6**
3.	$(SuP \,\&\, SeS) \supset (SaP \,\&\, PuS)$	1, 2; **ЛВ**
4.	$(SaP \,\&\, PuS) \supset PuP$	**ОСФ3**
5.	$(SuP \,\&\, SeS) \supset PuP$	3, 4; **ЛВ**
6.	$SiS \equiv \neg SeS$	**ОСФ12**
7.	$PjP \equiv \neg PuP$	**ОСФ14**
8.	$(SuP \,\&\, PjP) \supset SiS$	5, 6, 7; **ЛВ**
9.	SaS	**ОСФ7**
10.	$(SuP \,\&\, SjS \,\&\, PjP) \supset (SaS \,\&\, SiS \,\&\, SjS)$	8, 9; **ЛВ**

ОС3$^+$11. $\mu_1(SjS) = SjS \vee SuS \vee SuS$.

1.	$SjS \equiv \neg SuS$	**ОСФ14**
2.	$SjS \vee SuS \vee SuS$	1; **ЛВ**

ОС3$^+$14. $\mu_1(SjP \equiv \neg SuP) =$

$$(SjP \vee SuS \vee PuP) \equiv \neg(SuP \,\&\, SjS \,\&\, PjP).$$

1.	$SjP \equiv \neg SuP$	**ОСФ14**
2.	$SjS \equiv \neg SuS$	**ОСФ14**
3.	$PjP \equiv \neg PuP$	**ОСФ14**
4.	$(SjP \vee SuS \vee PuP) \equiv \neg(SuP \,\&\, SjS \,\&\, PjP)$	1, 2, 3; **ЛВ**

Из определения μ_1 следует, что если $\mu_1(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\mu_1(\mathbf{A})$ доказуемы в **ОСФ**, то $\mu_1(\mathbf{B})$ также доказуема в этой системе. Первая часть доказательства **Метатеоремы 8** завершена.

В качестве обратного перевода из **ОСФ** в **ОС3$^+$** рассмотрим функцию μ_2:

$\mu_2(SaP) = SaP \vee PoP$,	$\mu_2(SiP) = SiP$,
$\mu_2(SeP) = SeP$,	$\mu_2(SoP) = SoP \,\&\, PaP$,
$\mu_2(SuP) = SuP \vee SoS \vee PoP$,	$\mu_2(SjP) = SjP \,\&\, SaS \,\&\, PaP$,
$\mu_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\mu_2(\mathbf{A})$,	$\mu_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \mu_2(\mathbf{A}) \nabla \mu_2(\mathbf{B})$.

Покажем, что она удовлетворяет второй части критерия Смирнова, т.е. что μ_2-переводы всех теорем **ОСФ** доказуемы в **ОС3$^+$**. Заметим, что μ_2 не является погружающей операцией и играет лишь вспомогательную роль в доказательстве **Метатеоремы 8**.

ОСФ0. Переводы аксиом данного типа суть аксиомы **ОС3$^+$**.

ОСФ1. $\mu_2((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP) =$

$$((MaP \vee PoP) \,\&\, (SaM \vee MoM)) \supset (SaP \vee PoP).$$

1.	$(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$	**ОС3$^+$1**
2.	$(MaP \,\&\, SaM) \supset (SaP \vee PoP)$	1; **ЛВ**
3.	$MaP \supset (MaM \,\&\, PaP)$	**ОС3$^+$7**
4.	$MoM \equiv \neg MaM$	**ОС3$^+$13**
5.	$\neg(MaP \,\&\, MoM)$	3, 4; **ЛВ**
6.	$(MaP \,\&\, MoM) \supset (SaP \vee PoP)$	5; **ЛВ**
7.	$PoP \supset (SaP \vee PoP)$	закон **ЛВ**
8.	$\mu_2((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP)$	2, 6, 7; **ЛВ**

ОСФ2. $\mu_2((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, (SaM \vee MoM)) \supset SeP$.

1.	$(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$	**ОС3$^+$2**
2.	$MeP \supset MaM$	**ОС3$^+$8**
3.	$MoM \equiv \neg MaM$	**ОС3$^+$13**
4.	$\neg(MeP \,\&\, MoM)$	2, 3; **ЛВ**
5.	$(MeP \,\&\, MoM) \supset SeP$	4; **ЛВ**
6.	$(MeP \,\&\, (SaM \vee MoM)) \supset SeP$	1, 5; **ЛВ**

ОСФ3. $\mu_2((MaP \,\&\, SuM) \supset SuP) =$

$$((MaP \vee PoP) \,\&\, (SuM \vee SoS \vee MoM)) \supset (SuP \vee SoS \vee PoP).$$

1.	$(MaP \,\&\, SuM) \supset SuP$	**ОС3$^+$3**
2.	$(MaP \,\&\, SuM) \supset (SuP \vee SoS \vee PoP)$	1; **ЛВ**
3.	$(MaP \,\&\, SoS) \supset (SuP \vee SoS \vee PoP)$	закон **ЛВ**
4.	$MaP \supset (MaM \,\&\, PaP)$	**ОС3$^+$7**
5.	$MoM \equiv \neg MaM$	**ОС3$^+$13**
6.	$\neg(MaP \,\&\, MoM)$	4, 5; **ЛВ**
7.	$(MaP \,\&\, MoM) \supset (SuP \vee SoS \vee PoP)$	6; **ЛВ**
8.	$PoP \supset (SuP \vee SoS \vee PoP)$	закон **ЛВ**
9.	$\mu_2((MaP \,\&\, SuM) \supset SuP)$	2, 3, 7, 8; **ЛВ**

ОСФ4. $\mu_2((MuP \,\&\, SeM) \supset SaP) =$

$$((MuP \vee MoM \vee PoP) \,\&\, SeM) \supset (SaP \vee PoP).$$

1.	$(MuP \,\&\, SeM) \supset SaP$	**ОС3$^+$4**
2.	$(MuP \,\&\, SeM) \supset (SaP \vee PoP)$	1; **ЛВ**

3.	$SeM \supset MeS$	**ОСЗ$^+$5**
4.	$MeS \supset MaM$	**ОСЗ$^+$8**
5.	$MoM \equiv \neg MaM$	**ОСЗ$^+$13**
6.	$\neg(MoM \ \&\ SeM)$	3, 4, 5; **ЛВ**
7.	$(MoM \ \&\ SeM) \supset (SaP \vee PoP)$	6; **ЛВ**
8.	$(PoP \ \&\ SeM) \supset (SaP \vee PoP)$	закон **ЛВ**
9.	$\mu_2((MuP \ \&\ SeM) \supset SaP)$	2, 7, 8; **ЛВ**

ОСФ5. $\mu_2(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$ – аксиома **ОСЗ$^+$5**.

ОСФ6. $\mu_2(SuP \supset PuS) = (SuP \vee SoS \vee PoP) \supset (PuS \vee PoP \vee SoS)$.
Выводится непосредственно из **ОСЗ$^+$6** по правилам классической логики высказываний.

ОСФ7. $\mu_2(SaS) = SaS \vee SoS$.
Выводится из частного случая **ОСЗ$^+$13** ($SoS \equiv \neg SaS$).

ОСФ8. $\mu_2(SiP \supset SiS) = SiP \supset SiS$.
ОСФ9. $\mu_2(SoP \supset SiS) = (SoP \ \&\ PaP) \supset SiS$.
Выводятся из **ОСЗ$^+$10**.

ОСФ10. $\mu_2(SjP \supset SjS) = (SjP \ \&\ SaS \ \&\ PaP) \supset (SjS \ \&\ SaS \ \&\ SaS)$.
ОСФ11. $\mu_2(SoP \supset PjP) = (SoP \ \&\ PaP) \supset (PjP \ \&\ PaP \ \&\ PaP)$.
Выводятся из **ОСЗ$^+$11**.

ОСФ12. $\mu_2(SiP \equiv \neg SeP) = SiP \equiv \neg SeP$ – аксиома **ОСЗ$^+$12**.

ОСФ13. $\mu_2(SoP \equiv \neg SaP) = (SoP \ \&\ PaP) \equiv \neg(SaP \vee PoP)$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP$	**ОСЗ$^+$13**
2.	$PoP \equiv \neg PaP$	**ОСЗ$^+$13**
3.	$(SoP \ \&\ PaP) \equiv \neg(SaP \vee PoP)$	1, 2; **ЛВ**

ОСФ14. $\mu_2(SjP \equiv \neg SuP) =$

$$(SjP \ \&\ SaS \ \&\ PaP) \equiv \neg(SuP \vee SoS \vee PoP).$$

1.	$SjP \equiv \neg SuP$	**ОСЗ$^+$14**
2.	$SoS \equiv \neg SaS$	**ОСЗ$^+$13**
3.	$PoP \equiv \neg PaP$	**ОСЗ$^+$13**
4.	$(SjP \ \&\ SaS \ \&\ PaP) \equiv \neg(SuP \vee SoS \vee PoP)$	1, 2, 3; **ЛВ**

ОСФ15. $\mu_2(SiS \vee SjS) = SiS \vee (SjS \ \&\ SaS \ \&\ SaS)$.
Выводится из **ОСЗ$^+$10**.

Из определения μ_2 следует, что если $\mu_2(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $\mu_2(\mathbf{A})$ доказуемы в **ОСЗ$^+$**, то $\mu_2(\mathbf{B})$ также доказуема в этой системе. Вторая часть доказательства **Метатеоремы 8** завершена.

Остается продемонстрировать доказуемость в **ОСЗ$^+$** формулы $\mathbf{A} \equiv \mu_2(\mu_1(\mathbf{A}))$ для произвольной **A**. Применяем индукцию по числу пропозициональных связок в **A**.

Пусть **A** $= SaP$. Тогда $\mu_2(\mu_1(\mathbf{A})) = \mu_2(SaP \ \&\ SiS \ \&\ PjP) = (SaP \vee PoP) \ \&\ SiS \ \&\ PjP \ \&\ PaP \ \&\ PaP$.

1.	$PoP \equiv \neg PaP$	**ОСЗ$^+$13**
2.	$((SaP \vee PoP) \ \&\ PaP) \supset SaP$	1; **ЛВ**
3.	$\mu_2(\mu_1(SaP)) \supset SaP$	2; **ЛВ**
4.	SiS	**ОСЗ$^+$10**
5.	PjP	**ОСЗ$^+$11**
6.	$SaP \supset (SaS \ \&\ PaP)$	**ОСЗ$^+$7**
7.	$SaP \supset \mu_2(\mu_1(SaP))$	4, 5, 6; **ЛВ**
8.	$SaP \equiv \mu_2(\mu_1(SaP))$	3, 7; **ЛВ**

Пусть **A** $= SeP$. Тогда $\mu_2(\mu_1(\mathbf{A})) = \mu_2(SeP \ \&\ SiS \ \&\ PiP) = SeP \ \&\ SiS \ \&\ PiP$.

1.	SiS	**ОСЗ$^+$10**
2.	PiP	**ОСЗ$^+$10**
3.	$SeP \equiv SeP \ \&\ SiS \ \&\ PiP$	1, 2; **ЛВ**

Пусть **A** $= SuP$. Тогда $\mu_2(\mu_1(\mathbf{A})) = \mu_2(SuP \ \&\ SjS \ \&\ PjP) = (SuP \vee SoS \vee PoP) \ \&\ SjS \ \&\ SaS \ \&\ SaS \ \&\ PjP \ \&\ PaP \ \&\ PaP$.

1.	$SoS \equiv \neg SaS$	**ОСЗ$^+$13**
2.	$PoP \equiv \neg PaP$	**ОСЗ$^+$13**
3.	$((SuP \vee SoS \vee PoP) \ \&\ SaS \ \&\ PaP) \supset SuP$	1, 2; **ЛВ**
4.	$\mu_2(\mu_1(SuP)) \supset SuP$	3; **ЛВ**
5.	$SuP \supset SaS$	**ОСЗ$^+$9**
6.	$SuP \supset PuS$	**ОСЗ$^+$6**
7.	$PuS \supset PaP$	**ОСЗ$^+$9**
8.	$SuP \supset PaP$	6, 7; **ЛВ**
9.	SjS	**ОСЗ$^+$11**
10.	PjP	**ОСЗ$^+$11**
11.	$SuP \supset \mu_2(\mu_1(SuP))$	5, 8, 9, 10; **ЛВ**
12.	$SuP \equiv \mu_2(\mu_1(SuP))$	4, 11; **ЛВ**

Случаи, когда **A** имеет вид SiP, SoP и SjP, сводятся к только что рассмотренным трем случаям в силу определений переводов μ_1 и μ_2, а также аксиом **ОСЗ$^+$0**, **ОСЗ$^+$12–ОСЗ$^+$14**.

Случаи, когда **A** содержит пропозициональные связки, легко обосновываются с использованием индуктивного допущения и определений переводов μ_1 и μ_2.

Поскольку все три части критерия погружаемости справедливы для перевода μ_1 и систем **ОС3⁺** и **ОСФ**, **Метатеорема 8** *доказана*.

Метатеорема 9.
Обобщенный перевод $^{+}$ *погружает силлогистику* **ОС3⁺** *в исчисление предикатов.*

Из только что установленного факта погружаемости системы **ОС3⁺** в **ОСФ** посредством перевода μ_1 и доказанной в §2 данной главы погружаемости силлогистики **ОСФ** в классическое исчисление предикатов посредством перевода * вытекает, что **ОС3⁺** погружается в исчисление предикатов посредством композиции переводов μ_1 и *. Таким образом, произвольная формула **A** языка обобщенной силлогистики доказуема в системе **ОС3⁺** тогда и только тогда, когда формула $\mu_1(\mathbf{A})^*$ доказуема в исчислении предикатов.

Индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле **A** несложно доказать, что $\mu_1(\mathbf{A})^*$ логически эквивалентна в исчислении предикатов формуле $\mathbf{A}^{+}$, то есть композиция переводов μ_1 и * равносильна расширенному переводу $^{+}$. Отсюда следует, что формула $\mu_1(\mathbf{A})^*$ является теоремой первопорядкового исчисления в том и только в том случае, когда его теоремой является формула $\mathbf{A}^{+}$.

Из сказанного выше вытекает, что формула **A** языка обобщенной силлогистики доказуема в системе **ОС3⁺** тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}^{+}$ доказуема в исчислении предикатов. **Метатеорема 9** *доказана*.

§ 5. Обобщенная традиционная силлогистика

Завершим главу рассмотрением обобщенного (за счет введения констант i и j) варианта той силлогистики, которая формализуется исчислением **С4** и является дедуктивно эквивалентной силлогистике Я. Лукасевича.

В традиционной силлогистике принимается предпосылка о непустоте и неуниверсальности терминов, входящих в состав силлогистического рассуждения. Эта идея может быть реализована в семантике расширенного силлогистического языка за счет модификации понятия общезначимой формулы. Назовем формулу **A** **ОС4**-общезначимой, е.т.т. $|\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1}$ во всякой модели $<\mathbf{D}, \varphi>$ такой, что для любого термина S в составе **A**, $\varphi(S) \neq \varnothing$ и $\varphi(S) \neq \mathbf{D}$.

Множество **ОС4**-общезначимых формул составляет *обобщенную традиционную позитивную силлогистику*. В.И. Маркин в [40] показал, что это множество может быть аксиоматизировано исчислением **ОС4**, которое получается из системы **ОСФ** заменой схем аксиом **ОСФ8-ОСФ11**, **ОСФ15** на аксиомные схемы:

ОС16. $SaP \supset SiP$. **ОС17**. $SaP \supset SjP$.

При доказательстве семантической непротиворечивости и полноты **ОС4** используется следующее очевидное утверждение:

Утверждение 5.
Пусть $S_1,\dots, S_n$ *– список всех терминов, входящих в состав произвольной формулы* **A** *языка обобщенной силлогистики.* **A** *является* **ОС4**-*общезначимой, е.т.т.* **ОСФ**-*общезначима формула* $(S_1iS_1 \,\&\, S_1jS_1 \,\&\, \dots \,\&\, S_niS_n \,\&\, S_njS_n) \supset \mathbf{A}$.

Продемонстрируем сначала полноту системы **ОС4**.

Метатеорема 10.
Всякая **ОС4**-*общезначимая формула доказуема в* **ОС4**.

Рассмотрим произвольную **ОС4**-общезначимую формулу **A**. Согласно **Утверждению 5**, формула $(S_1iS_1 \,\&\, S_1jS_1 \,\&\, \dots \,\&\, S_niS_n \,\&\, S_njS_n) \supset \mathbf{A}$ является **ОСФ**-общезначимой и, по **Метатеореме 2**, доказуемой в системе **ОСФ**. Несложно показать, что **ОСФ** – подсистема **ОС4**. Поэтому формула $(S_1iS_1 \,\&\, S_1jS_1 \,\&\, \dots \,\&\, S_niS_n \,\&\, S_njS_n) \supset \mathbf{A}$ – теорема **ОС4**. Но ее антецедент также является теоремой **ОС4** (в его доказательстве используются **ОСФ7**, **ОС16**, **ОС17** и **ОСФ0**). Значит, и консеквент – формула **A** – доказуем в **ОС4**. **Метатеорема 10** *доказана*.

Докажем обратное метаутверждение.

Метатеорема 11.
Всякая теорема исчисления **ОС4** *является* **ОС4**-*общезначимой формулой.*

Легко установить **ОС4**-общезначимость всех аксиом системы **ОС4**. Остается показать, что правило *modus ponens* сохраняет свойство «быть **ОС4**-общезначимой формулой».

Допустим, что формулы $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$ и **A** **ОС4**-общезначимы. Пусть $M_1,\dots, M_m$ – список терминов, входящих в **A**, но не входящих в **B**; $P_1,\dots, P_k$ – список терминов, входящих и в **A**, и в **B**, а $Q_1,\dots, Q_r$ – список терминов, не входящих в **A**, но входящих в **B**. Ясно, что каждый из трех списков может оказаться пустым, но, по крайней мере, один – первый или второй, а также второй или третий – обязательно непуст.

Обозначим посредством $\mathbf{K_M}$ формулу $M_1 i M_1$ & $M_1 o M_1$ & ... & $M_m i M_m$ & $M_m o M_m$, посредством $\mathbf{K_P}$ – формулу $P_1 i P_1$ & $P_1 o P_1$ & ... & $P_p i P_p$ & $P_p o P_p$, посредством $\mathbf{K_Q}$ – формулу $Q_1 i Q_1$ & $Q_1 o Q_1$ & ... & $Q_q i Q_q$ & $Q_q o Q_q$. Согласно принятому допущению и **Утверждению 5**, формулы ($\mathbf{K_M}$ & $\mathbf{K_P}$ & $\mathbf{K_Q}$) ⊃ (**A** ⊃ **B**) и ($\mathbf{K_M}$ & $\mathbf{K_P}$) ⊃ **A** **ОСФ**-общезначимы. Покажем, что в этом случае формула ($\mathbf{K_P}$ & $\mathbf{K_Q}$) ⊃ **B** также будет **ОСФ**-общезначимой.

Справедливость данного утверждения очевидна, когда список $M_1,..., M_m$ пуст. В случае непустоты указанного списка продолжим рассуждение методом «от противного».

Предположим, что формула ($\mathbf{K_P}$ & $\mathbf{K_Q}$) ⊃ **B** не является **ОСФ**-общезначимой. Тогда существует модель <**D**, φ>, в которой она ложна. Значит, $|P_1 i P_1|_\varphi = |P_1 o P_1|_\varphi = ... = |P_p i P_p|_\varphi = |P_p o P_p|_\varphi = \mathbf{1}$, $|Q_1 i Q_1|_\varphi = |Q_1 o Q_1|_\varphi = ... = |Q_q i Q_q|_\varphi = |Q_q o Q_q|_\varphi = \mathbf{1}$, а $|\mathbf{B}|_\varphi = \mathbf{0}$ в модели <**D**, φ>. Из того, что формулы $P_1 i P_1$ и $P_1 o P_1$ принимают в модели <**D**, φ> значение **1**, в силу условий истинности **И2** и **И11**, следует, что множество **D** содержит, как минимум, два элемента.

Рассмотрим модель <**D**′, φ′>, в которой **D**′ = **D**, φ′ сопоставляет терминам $P_1,..., P_p$, $Q_1,..., Q_q$ те же значения, что и φ; выделим в **D**′ произвольный элемент **d**, и пусть φ′ сопоставляет каждому из терминов $M_1,..., M_m$ множество {**d**}. В силу **И2**, $|M_1 i M_1|_{\varphi'} = ... = |M_m i M_m|_{\varphi'} = \mathbf{1}$ в <**D**′, φ′>, а поскольку в **D**′ найдется отличный от **d** объект, то, в силу **И11**, $|M_1 o M_1|_{\varphi'} = ... = |M_m o M_m|_{\varphi'} = \mathbf{1}$ в этой модели. Таким образом, формула $\mathbf{K_M}$ истинна в <**D**′, φ′>.

Значения формул $\mathbf{K_P}$, $\mathbf{K_Q}$ и **B** в модели <**D**′, φ′> такие же, как и в <**D**, φ> (соответственно, **1**, **1** и **0**), поскольку в их состав не входят термины $M_1,..., M_m$.

Из **ОСФ**-общезначимости формулы ($\mathbf{K_M}$ & $\mathbf{K_P}$) ⊃ **A** и истинности в <**D**′, φ′> ее антецедента вытекает, что консеквент **A** в данной модели также истинен. А из этого обстоятельства, общезначимости формулы ($\mathbf{K_M}$ & $\mathbf{K_P}$ & $\mathbf{K_Q}$) ⊃ (**A** ⊃ **B**) и истинности $\mathbf{K_M}$ & $\mathbf{K_P}$ & $\mathbf{K_Q}$ в <**D**′, φ′> можно сделать вывод, что $|\mathbf{B}|_{\varphi'} = \mathbf{1}$ в этой модели, что противоречит одному из положений нашего рассуждения. Следовательно, формула ($\mathbf{K_P}$ & $\mathbf{K_Q}$) ⊃ **B** **ОСФ**-общезначима, откуда по **Утверждению 5** вытекает **ОС4**-общезначимость формулы **B**. Правило *modus ponens* сохраняет, таким образом, свойство «*быть* **ОС4**-*общезначимой формулой*». **Метатеорема 11** *доказана*.

В.И. Маркин [40] показал, что исчисление **ОС4**, формализующее обобщенную традиционную позитивную силлогистику, погружается в исчисление предикатов посредством следующего перевода Θ′:

$$\Theta'(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \,\&\, \exists x \neg S_1 x \,\&\, ... \,\&\, \exists x S_n x \,\&\, \exists x \neg S_n x) \supset \mathbf{A}^*,$$

где **A** – произвольная формула расширенного языка силлогистики, а $S_1,..., S_n$ – список всех универсалий в составе **A**, т.е. продемонстрировал справедливость следующего метаутверждения:

Метатеорема 12.
Перевод Θ′ погружает систему **ОС4** *в классическое исчисление предикатов*.

Формула **A** доказуема в системе **ОС4**, е.т.е. **A** **ОС4**-общезначима (в силу **Метатеорем 10 и 11**), е.т.е. формула ($S_1 i S_1$ & $S_1 o S_1$ & ... & $S_n i S_n$ & $S_n o S_n$) ⊃ **A** **ОСФ**-общезначима (по **Утверждению 5**), е.т.е. ($S_1 i S_1$ & $S_1 o S_1$ & ... & $S_n i S_n$ & $S_n o S_n$) ⊃ **A** доказуема в системе **ОСФ** (в силу **Метатеорем 1 и 2**), е.т.е. (($S_1 i S_1$ & $S_1 o S_1$ & ... & $S_n i S_n$ & $S_n o S_n$) ⊃ **A**)* – теорема исчисления предикатов (в силу погружаемости **ОСФ** в исчисление предикатов – **Метатеоремы 3**), е.т.е. $(\exists x S_1 x \,\&\, \exists x \neg S_1 x \,\&\, ... \,\&\, \exists x S_n x \,\&\, \exists x \neg S_n x) \supset \mathbf{A}^*$ – теорема исчисления предикатов (по определению *), е.т.е. формула Θ′(**A**) доказуема в исчислении предикатов (по определению Θ′).

Глава V

ПОЗИТИВНЫЕ СИЛЛОГИСТИКИ С НЕСТАНДАРТНЫМИ КОНСТАНТАМИ

§ 1. Ассерторическая силлогистика Н.А. Васильева

В большинстве силлогистических теорий, в том числе в аристотелевской, традиционной и фундаментальной силлогистиках, в качестве исходных рассматриваются четыре силлогистические константы: ***a*** (образующая из универсалий *S* и *P* форму общеутвердительного высказывания – ***SaP***), ***e*** (образующая форму общеотрицательного высказывания – ***SeP***), ***i*** (образующая форму частноутвердительного высказывания – ***SiP***) и ***o*** (образующая форму частноотрицательного высказывания – ***SoP***).

Однако в истории логики имели место попытки формулировки силлогистик с иным набором исходных силлогистических констант. В данной главе мы осуществим современную реконструкцию двух таких систем позитивной силлогистики.

Одна из них разрабатывалась выдающимся российским логиком Н.А. Васильевым, который в опубликованной в 1910 г. статье «О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого» [14, с. 12-53] предложил положить в основу силлогистики наряду с общеутвердительными и общеотрицательными высказываниями так называемые определенно-частные суждения, имеющие вид «Только некоторые *S* есть *P*».

Другая система силлогистики основана на выделении пяти базисных разновидностей категорических высказываний, которое осуществил в 1881 г. Дж. Венн в своем фундаментальном труде «Символическая логика» [90]: в высказываниях первого типа утверждается равенство объемов субъекта и предиката, в высказываниях второго типа – строгое включение объема субъекта в объем предиката, в высказываниях третьего типа – строгое включение объема предиката в объем субъекта, высказывания четвертого типа утверждают, что объемы его терминов перекрещиваются, а высказывания пятого типа – что пересечение этих объемов пусто.

Н.А. Васильевым с разной степенью детальности разработаны несколько логических теорий. Наиболее известна его «воображаемая неаристотелева логика», идея которой состоит во введении в логику наряду с утвердительными и отрицательными так называемых индифферентных суждений – суждений противоречия, содержащих связку

«суть и не суть зараз». Однако самой первой логической системой Васильева была его ассерторическая силлогистика, основы которой излагались, как уже говорилось, в статье «О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого».

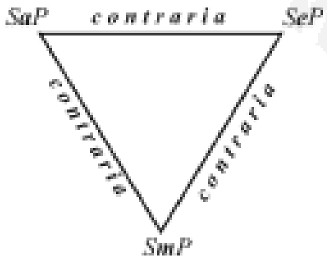
Ее построение стимулировалось негативным отношением Васильева к частным суждениям (***SiP*** и ***SoP***) аристотелевской и традиционной силлогистик, где квантор существования трактуется как «по крайней мере один, а может быть и все». Такие суждения называются неопределенно-частными. Васильев считал, что они не выражают законченного знания о своем субъекте, продиктованы неполнотой информации и скрыто содержат в себе задачу выяснить, все ли упомянутые предметы обладают неким свойством или не все.

Такие суждения не могут считаться подлинно научными – суждениями о понятиях. «Неопределенные суждения,– пишет Васильев,– могут фигурировать только в качестве научной проблемы, а не научного решения» [14, с.21]. Они оправданы только на дологической стадии познания и играют лишь подготовительную роль при переходе к формулировке суждений о понятии. Суждения же о понятии, согласно Васильеву, могут быть только общими, и таких типов суждений всего три. Два из них хорошо известны из аристотелевской логики: это общеутвердительные («Всякий *S* есть *P*») и общеотрицательные («Ни один *S* не есть *P*») суждения. Третий тип суждений о понятии имеет форму «Только некоторые *S* есть *P*». Суждение данной структуры принято называть определенно-частным. Васильев предлагает именовать его «суждением акцидентальным, или так называемым частным, ибо в действительности оно общее» [14, с.26].

Почему же его можно трактовать как общее? «Акцидентальное суждение,– отвечает Васильев,– не выражает никакого колебания между двумя гипотезами, не заключает в себе двух противоречащих утверждений, вообще не заключает в себе ничего проблематического», оно «выражает какое-нибудь вневременное, вечное правило (так же как общеутвердительное и общеотрицательное)» [14, с.26-27]. Общим оно является и потому, что содержит информацию обо всем объеме субъекта. Показательна в этой связи иная словесная формулировка акцидентальных суждений, данная Васильевым в работе «Воображаемая (неаристотелева) логика» [14, с.70], – «Одни *S* суть *P*, а все остальные не суть *P*».

Для обозначения определенно-частных высказываний Васильев использует букву «***m***». Договоримся считать символической записью высказывания вида «Только некоторые *S* есть *P*» формулу ***SmP***.

В статье «О частных суждениях, о треугольнике противоположностей, о законе исключенного четвертого» Васильев подробно исследует только один, хотя и ключевой, фрагмент развиваемой им силлогистической теории, а именно, учение о логических отношениях между тремя типами суждений о понятии – общеутвердительными, общеотрицательными и акцидентальными. Эти суждения (с одинаковыми субъектами и одинаковыми предикатами) образуют так называемый *«треугольник противоположностей»*, который в ассерторической силлогистике Васильева приходит на смену логическому квадрату аристотелевской и традиционной силлогистик:



Каждые два высказывания из трех – $\boldsymbol{SaP}$, $\boldsymbol{SeP}$ и $\boldsymbol{SmP}$ – находятся друг к другу, согласно Васильеву, в отношении противоположности (контрарности): «оба не могут быть истинны, оба могут быть ложны» [14, с.37]. Таким образом, законами силлогистики Васильева являются следующие формулы:

$$\neg(\boldsymbol{SaP} \ \& \ \boldsymbol{SeP}), \ \ \neg(\boldsymbol{SaP} \ \& \ \boldsymbol{SmP}), \ \ \neg(\boldsymbol{SeP} \ \& \ \boldsymbol{SmP}).$$

Кроме того, логически истинной оказывается дизъюнкция указанных трех высказываний – *закон исключенного четвертого*:

$$\boldsymbol{SaP} \vee \boldsymbol{SeP} \vee \boldsymbol{SmP}.$$

«Если два таких предложения оба ложны, то, значит, истинно третье суждение… Значит, отношение между ***a***, ***e*** и ***m*** есть отношение полной и исключающей дизъюнкции… если отпадают две каких-нибудь возможности, то необходимо истинна третья. *Четвертой возможности не может быть*. Это и есть,– пишет Васильев,– закон исключенного четвертого» [14, с.37-38].

Что касается собственно учения о силлогизме, то в упоминавшейся своей первой статье он его не развивает. Однако после ее публикации Васильев продолжает работать в данном направлении. Об этом

свидетельствует «Отчет приват-доцента по кафедре философии Императорского Казанского университета Н.А. Васильева о ходе его научных занятий за время с 1 июля 1911 г. по 1 июля 1912 г.» [14, с. 149-169]. «Любопытные следствия перемены смысла частного суждения,– пишет Васильев,– сказываются в силлогистике. Если браковать частное суждение типа «некоторые, а может быть и все», то приходится браковать и все модусы силлогизма, которые дают заключение такого типа, и оставлять только те модусы силлогизма, которые могут давать заключение типа «Только некоторые *S* суть (не суть) *P*».Оказывается, однако, что из всех модусов, которые могут давать неопределенное заключение типа «Некоторые, а может быть, все *S* суть (не суть) *P*», … только два – *Disamis* и *Bocardo* – могут давать заключение типа «только некоторые». В остальных же модусах, даже если взять соответственную частную посылку и сделать ее истинно частным суждением… все равно заключение модуса будет неопределенным» [14, с. 154]. Однако, поскольку определенно-частные высказывания не различаются по качеству на утвердительные и отрицательные (они содержат и утверждение, и отрицание), *Disamis* и *Bocardo* склеиваются в один модус – ***mam*** III фигуры:

Только некоторые *M* есть *P*	($\boldsymbol{MmP}$)
Все *M* есть *S*	($\boldsymbol{MaS}$)
Только некоторые *S* есть *P*	($\boldsymbol{SmP}$)

«Мы должны признать,– отмечает Васильев,– что модусы *Disamis* и *Bocardo* – не два модуса, а один, только выраженный различными способами» [14, с. 154]. Указанный модус оказывается единственным корректным в силлогистике Васильева модусом, содержащим определенно-частное высказывание.

Васильев отмечает также, что правильными в его силлогистике остаются модусы *Barbara* и *Celarent* I фигуры, *Camestres* и *Cesare* II фигуры. Сюда следует добавить и модус *Camenes* IV фигуры, которую Васильев вслед за Аристотелем просто не рассматривает.

Таким образом, в ассерторической силлогистике Васильева имеется шесть правильных модусов:

$$(\boldsymbol{MaP} \ \& \ \boldsymbol{SaM}) \supset \boldsymbol{SaP}, \qquad (\boldsymbol{MeP} \ \& \ \boldsymbol{SaM}) \supset \boldsymbol{SeP},$$
$$(\boldsymbol{PaM} \ \& \ \boldsymbol{SeM}) \supset \boldsymbol{SeP}, \qquad (\boldsymbol{PeM} \ \& \ \boldsymbol{SaM}) \supset \boldsymbol{SeP},$$
$$(\boldsymbol{MmP} \ \& \ \boldsymbol{MaS}) \supset \boldsymbol{SmP}, \qquad (\boldsymbol{PaM} \ \& \ \boldsymbol{MeS}) \supset \boldsymbol{SeP}.$$

Первая формальная реконструкция силлогистики Васильева на базе классического исчисления высказываний была осуществлена

В.А. Смирновым в статье «Логические идеи Н.А. Васильева и современная логика» [64, с.229-259]. Он построил исчисление **С2В** в языке с исходными силлогистическими константами ***a***, ***e***, ***m***, постулатами которого являются схемы аксиом

В0.Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

В1. $(MaP \mathbin{\&} SaM) \supset SaP$, **В5**. $\neg(SaP \mathbin{\&} SmP)$,

В2. $(MeP \mathbin{\&} SaM) \supset SeP$, **В6**. $\neg(SeP \mathbin{\&} SmP)$,

В3. $SeP \supset PeS$, **В7**. $SaP \vee SeP \vee SmP$,

В4. $\neg(SaP \mathbin{\&} SeP)$, **В8**. $SeP \vee SaS$,

и единственное правило вывода – *modus ponens*.

В.А. Смирнов показал, что реконструированная силлогистика Васильева **С2В** дефиницильно эквивалентна системе чистой позитивной силлогистики **С2**.

Суть данного результата состоит в следующем. Добавим к системе **С2В** определения отсутствующих в ее языке силлогистических констант ***i*** и ***o***:

Df1. $SiP \equiv_{df} SaP \vee SmP$, $SoP \equiv_{df} SeP \vee SmP$.

Добавим также к системе **С2** определение отсутствующей в ее языке силлогистической константы ***m***:

Df2. $SmP \equiv_{df} SiP \mathbin{\&} SoP$.

Исчисление **С2В**, пополненное определениями **Df1**, и исчисление **С2**, пополненное определением **Df2**, имеют один и тот же класс теорем.

Обратим внимание на то обстоятельство, что определение констант ***i*** и ***o*** в языке с исходными константами ***a***, ***e***, ***m*** для системы **С2В** может быть осуществлено без использования константы ***m***:

Df1'. $SiP \equiv_{df} \neg SeP$, $SoP \equiv_{df} \neg SaP$.

Васильевская силлогистика **С2В**, как отмечает В.А. Смирнов [65], дефиницильно эквивалентна и другим системам чистой позитивной силлогистики – фундаментальной (**СФ**), больцановской (**СБ**), кэрролловской (**СК**). Кроме того, она погружается в классическое исчисление предикатов посредством следующей модификации перевода $^{\wedge}$, исходно предназначавшегося для системы **С2** (см. §4 Главы III):

$SaP^{\wedge} = \forall x(Sx \supset Px) \mathbin{\&} \exists x Sx$,

$SeP^{\wedge} = \forall x(Sx \supset \neg Px)$,

$SmP^{\wedge} = \exists x(Sx \mathbin{\&} Px) \mathbin{\&} \exists x(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$,

$(\neg \mathbf{A})^{\wedge} = \neg(\mathbf{A}^{\wedge})$, $(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^{\wedge} = \mathbf{A}^{\wedge} \nabla \mathbf{B}^{\wedge}$.

В языке с исходными константами ***a***, ***e***, ***m*** могут быть сформулированы исчисления, дефиницильно эквивалентные другим системам чистой позитивной силлогистики, в частности, модификации фундаментальной, больцановской и традиционной силлогистик. Такого рода *силлогистические исчисления васильевского типа* были построены Т.П. Костюк и В.И. Маркиным в [29].

Система **СФВ**, аксиоматизирующая фундаментальную силлогистику васильевского типа, получается из **С2В** заменой схем аксиом **В4** и **В8** на

В9. SaS, **В10**. $SeS \supset SeP$, **В11**. $SeS \supset SaP$.

Для доказательства дефиницильной эквивалентности **СФВ** и стандартной фундаментальной силлогистики **СФ** достаточно к системе **СФВ** добавить определения **Df1'** констант ***i*** и ***o***, а к системе **СФ** – определение **Df2** константы ***m***.

Из этого факта и доказанной в §1 Главы III погружаемости **СФ** в исчисление предикатов следует, что силлогистика васильевского типа **СФВ** погружается в классическое исчисление предикатов посредством следующей модификации перевода *, исходно предназначавшегося для системы **СФ** (см. §1 Главы III):

$SaP^{*} = \forall x(Sx \supset Px)$,

$SeP^{*} = \forall x(Sx \supset \neg Px)$,

$SmP^{*} = \exists x(Sx \mathbin{\&} Px) \mathbin{\&} \exists x(Sx \mathbin{\&} \neg Px)$,

$(\neg \mathbf{A})^{*} = \neg(\mathbf{A}^{*})$, $(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^{*} = \mathbf{A}^{*} \nabla \mathbf{B}^{*}$.

Система **СБВ**, аксиоматизирующая перестроенный в васильевском духе (т.е. в языке с исходными константами ***a***, ***e*** и ***m***) вариант позитивного фрагмента силлогистики Больцано, содержит схемы аксиом **В0-В2**, **В4-В6**, правило *modus ponens*, а также три дополнительные схемы аксиом:

В12. $(SaP \vee SmP) \supset (PaS \vee PmS)$, **В13**. $(SaP \vee SmP) \supset SaS$,

В14. $SaS \supset (SaP \vee SeP \vee SmP)$.

Дефиницильная эквивалентность **СБВ** и системы **СБ**, сформулированной в §2 Главы III, доказывается посредством расширения **СБВ** определениями **Df1** констант ***i*** и ***o*** и расширения **СБ** определением **Df2** константы ***m***.

Можно также обосновать метаутверждение о погружаемости системы **СБВ** в классическое исчисление предикатов посредством модификации функции °, погружающей в него **СБ** (см. §2 Главы III):

$SaP^{\circ} = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists xSx$,

$SeP^{\circ} = \forall x(Sx \supset \neg Px) \,\&\, \exists xSx$,

$SmP^{\circ} = \exists x(Sx \,\&\, Px) \,\&\, \exists x(Sx \,\&\, \neg Px)$,

$(\neg\mathbf{A})^{\circ} = \neg(\mathbf{A}^{\circ})$, $\qquad$ $(\mathbf{A} \,\overline{\vee}\, \mathbf{B})^{\circ} = \mathbf{A}^{\circ} \,\overline{\vee}\, \mathbf{B}^{\circ}$.

Построение в терминах констант ***a***, ***e*** и ***m*** варианта позитивного фрагмента силлогистики Кэрролла даст, по существу, систему **С2В**, поскольку кэрролловская интерпретация общеутвердительных и общеотрицательных высказываний совпадает с аристотелевско-оккамовской (последняя как раз и реализуется в **С2**), а акцидентальные высказывания естественно трактовать также в духе модифицированного перевода $^{\circ}$.

Особый интерес представляет формулировка в языке с исходными константами ***a***, ***e*** и ***m*** «васильевского» аналога традиционной позитивной силлогистики, формализуемой исчислением **С4**.

Исчисление **С4В** содержит все дедуктивные постулаты системы **С2В** В.А. Смирнова, а также дополнительную схему аксиом:

В15. $\neg SeS$.

Система **С4В** дефиниционально эквивалента **С4**. При доказательстве этого метаутверждения следует в качестве определений констант ***i*** и ***o***, отсутствующих в языке **С4В**, рассмотреть **Df1'**, а в качестве определения константы ***m***, отсутствующей в языке **С4**, взять **Df2**.

Одна из функций, погружающих систему **С4В** в исчисление предикатов, представляет собой модификацию перевода Θ из стандартного языка позитивной силлогистики в язык логики одноместных предикатов. Этот перевод, как было показано в §4 Главы III, погружает силлогистику **С4** в исчисление предикатов. Модифицированный перевод Θ формул силлогистического языка с исходными константами ***a***, ***e*** и ***m*** на язык логики предикатов определяется следующим образом:

$$\Theta(\mathbf{A}) = (\exists xS_1x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists xS_nx) \supset \mathbf{A}^{*},$$

где **А** – произвольная формула языка силлогистики васильевского типа, $S_1,\ldots, S_n$ – список всех терминов (универсалий) в составе **А**, а * – заданный ранее в этом параграфе перевод системы **СФВ** (модификации в стиле Васильева фундаментальной силлогистики) в исчисление предикатов.

Т.П. Костюк [28] доказала метатеорему о том, что модифицированная указанным выше способом функция Θ погружает силлогистику **С4В** в классическое одноместное исчисление предикатов.

В заключение параграфа хотелось бы исследовать естественно возникающий вопрос: какую из систем васильевского типа (в языке с исходными ***a***, ***e*** и ***m***) следует рассматривать в качестве наиболее адекватной реконструкции ассерторической силлогистики самого Н.А. Васильева.

«Васильевские» варианты фундаментальной и больцановской силлогистик явно не подходят на эту роль, поскольку в них недоказуемы некоторые законы силлогистики Васильева. Так, в исчислении **СФВ** принимаемый Васильевым закон $\neg(SaP \,\&\, SeP)$ не является теоремой, а в **СБВ** недоказуем другой закон силлогистики Васильева – $SaP \vee SeP \vee SmP$.

Из всех рассмотренных в этом параграфе систем васильевского типа только в исчислении **С2В** В.А. Смирнова и в исчислении **С4В** Т.П. Костюк и В.И. Маркина доказуемы аналоги всех явно принимавшихся самим Васильевым силлогистических принципов – законов треугольника противоположностей, закона исключенного четвертого, правильных модусов с общими и определенно-частными высказываниями.

Различие между этими системами состоит в следующем: теоремами **С4В** являются законы силлогистического тождества (в форме SaS и $\neg SeS$), в то время как в **С2В** доказуемы лишь их ослабления ($SaP \supset SaS$, $SmP \supset SaS$ и $\neg SeP \supset SaS$). Причина этого – в принятии различных условий истинности высказываний с пустыми субъектами. В основе **С2В** лежит оккамовская трактовка, согласно которой информация о непустоте субъекта является частью содержания общеутвердительных высказываний, а общеотрицательные высказывания с пустым субъектом всегда истинны. **С4В** исходит из принимавшейся в традиционной силлогистике исходной предпосылки о непустоте всех терминов при интерпретации любого силлогистического утверждения.

Т.П. Костюк высказала справедливое предположение о том, что «поскольку во времена Васильева доминирующее положение занимала традиционная, а не аристотелевско-оккамовская версия силлогистики, именно этот традиционный вариант силлогистической теории и был перестроен Васильевым в свете его оригинальной трактовки частных суждений» [28, с. 267].

Однако в работах Васильева можно найти и текстуальное подтверждение того, что он, скорее всего, принимал традиционную интерпретацию категорических высказываний. На это обратили внимание О.Ю. Карпинская и В.И. Маркин [23]. В своей последней статье «Логика и металогика», исследуя истинностный статус суждения

«Все треугольники имеют три угла», Васильев пишет: «Мы ... можем рассматривать геометрию совершенно непохожую на нашу, но эта истина не теряет своей общезначимости. В данной геометрии может и совсем не быть треугольников, но **если они есть** (*выделено нами – Авт.*) , то они имеют три угла. ... если мы найдем геометрию без фигур с тремя углами, то мы скажем: «В этой геометрии нет треугольников», а не скажем, что благодаря этому перестала быть верной истина «Все треугольники имеют 3 угла»» [14, с. 96–97]. Данный фрагмент свидетельствует о принятии Васильевым закона силлогистического тождества ***SaS***, и, что более важно, – о принятии имевшей место в традиционной силлогистике трактовки утверждений как содержащих пресуппозицию о непустоте терминов в их составе.

Основываясь на приведенных аргументах подлинно адекватной современной реконструкцией ассерторической силлогистики Васильева следует считать именно систему **С4В**, которая представляет собой переформулировку – в языке с исходными константами ***a***, ***e*** и ***m*** – традиционного варианта чистой позитивной силлогистики.

§ 2. Силлогистика Венна

Другая оригинальная попытка построения силлогистики с нестандартным набором силлогистических констант была предпринята Дж. Венном в [90]. При выделении базисных типов категорических высказываний Венн существенным образом опирался на теорию суждений, развивавшуюся У. Гамильтоном [75].

Гамильтон считал необходимым при определении количественной оценки суждения принимать во внимание характер квантификации не только его субъекта, но и предиката. Поэтому при делении множественных высказываний по количеству получаются не два их типа – общие и частные, а четыре: *обще-общие*, *обще-частные*, *частно-общие* и *частно-частные*. Если же учесть, что по качеству категорические высказывания делятся на утвердительные и отрицательные, то при совместной, «количественно-качественной» классификации получается восемь исходных типов высказываний.

Что же касается Венна, то он предложил выделять пять базисных разновидностей категорических высказываний: утвердительные высказывания распадаются на четыре класса в полном соответствии с гамильтоновской классификацией, и рассматривается лишь один тип отрицательных высказываний, а именно, общеотрицательные.

Таким образом, согласно Венну, категорические высказывания относятся к одному из следующих пяти типов:

– обще-обще-утвердительные «Все *S* есть все *P*» (будем использовать для них символическую запись ***SaaP***),
– обще-частно-утвердительные «Все *S* есть некоторые *P*» (символически – ***SaiP***),
– частно-обще-утвердительные «Некоторые *S* есть все *P*» (символически – ***SiaP***),
– частно-частно-утвердительные «Некоторые *S* есть некоторые *P*» (символически – ***SiiP***),
– общеотрицательные «Ни один *S* не есть *P*» (символически –***SeP***).

Высказывания последнего типа Венн часто формулирует также в стиле Гамильтона, как обще-обще-отрицательные: «Ни один *S* не есть ни один *P*», но подчеркивает при этом их равносильность обычным высказываниям типа ***e***.

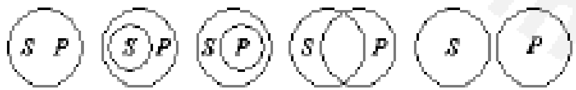
Заметим, что приведенные гамильтоновские формулировки утвердительных высказываний с квантифицированным предикатом имеют в русском переводе не совсем ясный и однозначный смысл. Более точно смысл высказываний указанных типов можно передать следующим образом:

SaaP – «Класс *S* совпадает с классом *P*»,
SaiP – «Класс *S* совпадает с частью класса *P*»,
SiaP – «Часть класса *S* совпадает с классом *P*»,
SiiP – «Часть класса *S* совпадает с частью класса *P*»,

где под частью класса понимается правильный его подкласс (не совпадающий с самим классом).

Укажем на особенности системы силлогистических констант {***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e***} по сравнению со стандартной системой {***a***, ***e***, ***i***, ***o***}, лежащей в основе аристотелевского и традиционного вариантов позитивной ассерторической силлогистики.

Известно, что при семантическом построении силлогистик указанного типа используются в качестве модельных схем круговые диаграммы Эйлера-Жергонна, фиксирующие различные типы возможных отношений между объемами субъекта и предиката элементарных формул силлогистического языка (форм категорических высказываний). Всего таких диаграмм пять:



I II III IV V

В традиционной силлогистике при принятии исходной предпосылки о непустоте терминов категорических высказываний формула *SaP* оказывается истинной на диаграммах I и II, *SeP* – на диаграмме V, *SiP* – на диаграммах I-IV, *SoP* – на диаграммах III-V.

Что же касается пяти типов высказываний, выделяемых Венном, то при условии непустоты терминов каждому типу соответствует ровно одна диаграмма, на которой высказывания данного (и только такого) типа принимают значение «истина». Высказывания формы *SaaP* истинны только на диаграмме I, *SaiP* – на диаграмме II, *SiaP* – на диаграмме III, *SiiP* – на диаграмме IV, *SeP* – на диаграмме V.

Кроме того, силлогистические константы ***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e*** Венна в отличие от стандартных констант ***a***, ***e***, ***i***, ***o*** образуют в терминологии В.А. Смирнова *полный базис*: элементарные формулы различных типов с одинаковыми субъектами и предикатами попарно несовместимы, а их дизъюнкция является законом. В этом они сходны с константами ***a***, ***e***, ***m*** силлогистики Васильева, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Действительно, для любых отличных друг от друга силлогистических констант ***y*** и ***q*** из множества {***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e***} логически истинными оказываются утверждения

$$\neg(SyP \,\&\, SqP),$$

которые в духе Васильева следовало бы называть законами «пятиугольника противоположностей»; имеет место также и «закон исключенного шестого»:

$$SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP.$$

Венн дал набросок позитивной силлогистики с исходными константами ***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e***, каждая из которых репрезентирует ровно один тип отношений между объемами субъекта и предиката на круговых диаграммах Эйлера-Жергонна.

Современная формальная реконструкция силлогистики Венна проделана Д.В. Дубаковым и В.И. Маркиным [16]. По сути дела, ими была осуществлена переформулировка в рамках языка с венновской силлогистической сигнатурой *традиционного* варианта позитивной силлогистики. Этот вариант, как уже говорилось ранее, формализуется посредством силлогистики Лукасевича (системы **C4**), и с семантической точки зрения, он предполагает принятие экзистенциальной предпосылки о непустоте субъектов и предикатов категорических высказываний.

Была сформулирована система силлогистики **C4V** с множеством исходных силлогистических констант {***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e***}, которая, как говорят, «с точностью до определений» эквивалентна силлогистике Лукасевича.

В алфавит **C4V** входят бесконечный список универсалий, силлогистические константы ***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e***, пропозициональные связки ¬, &, ∨, ⊃ и ≡, скобки. Элементарными формулами языка системы являются выражения следующих типов: *SaaP*, *SaiP*, *SiaP*, *SiiP*, *SeP*, где *S* и *P* – произвольные универсалии. Сложные формулы образуются из элементарных с помощью пропозициональных связок.

Схемами аксиом силлогистики **C4V** являются:

V0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

V1. $(MaaP \,\&\, SaaM) \supset SaaP$,	**V11**. $SeP \supset PeS$,
V2. $(MaaP \,\&\, SaiM) \supset SaiP$,	**V12**. $SaaS$,
V3. $(MaiP \,\&\, SaaM) \supset SaiP$,	**V13**. $\neg(SaaP \,\&\, SaiP)$,
V4. $(MaiP \,\&\, SaiM) \supset SaiP$,	**V14**. $\neg(SaaP \,\&\, SiaP)$,
V5. $(MeP \,\&\, SaaM) \supset SeP$,	**V15**. $\neg(SaaP \,\&\, SiiP)$,
V6. $(MeP \,\&\, SaiM) \supset SeP$,	**V16**. $\neg(SaiP \,\&\, SiaP)$,
V7. $SaaP \supset PaaS$,	**V17**. $\neg(SaiP \,\&\, SiiP)$,
V8. $SaiP \supset PiaS$,	**V18**. $\neg(SaaP \,\&\, SeP)$,
V9. $SiaP \supset PaiS$,	**V19**. $\neg(SiiP \,\&\, SeP)$,
V10. $SiiP \supset PiiS$,	**V20**. $SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP$.

Правило вывода системы **C4V** – *modus ponens*. Понятия доказательства и теоремы обычные.

Схемы аксиом **V1-V6** представляют собой аналоги правильных модусов первой фигуры силлогизма. Схемы аксиом **V7-V11** суть принципы обращения различных типов высказываний, выделяемых Венном. Схема **V12** – закон силлогистического тождества. Схемы аксиом **V13-V19** есть не что иное, как законы «пятиугольника противоположностей». Три других закона данного типа – $\neg(SaiP \,\&\, SeP)$, $\neg(SiaP \,\&\, SiiP)$ и $\neg(SiaP \,\&\, SeP)$ – являются теоремами данной системы. Схема **V20** суть закон «исключенного шестого».

Сравнение позитивных силлогистик **C4V** и **C4** было осуществлено Д.В. Дубаковым и В.И. Маркиным [16] в терминах погружающих операций, ими была доказана рекурсивная эквивалентность этих исчислений, т.е. их погружаемость друг в друга.

Для доказательства рекурсивной эквивалентности исчислений **C4V** и **C4**, согласно использовавшемуся и ранее критерию, сформулированному В.А. Смирновым [62], достаточно указать два перевода – ν_1 из множества формул $\mathbf{L}_{C4V}$ языка системы **C4V** в множество формул $\mathbf{L}_{C4}$ языка системы **C4** и ν_2 из $\mathbf{L}_{C4}$ в $\mathbf{L}_{C4V}$ – и обосновать справедливость следующих четырех утверждений:

$$\textbf{(1)}\ \dot\forall\, \mathbf{A}\in\mathbf{L}_{C4V}\ (\mathbf{C4V}\vdash\mathbf{A}\ \dot\supset\ \mathbf{C4}\vdash\nu_1(\mathbf{A})),$$
$$\textbf{(2)}\ \dot\forall\, \mathbf{A}\in\mathbf{L}_{C4}\ (\mathbf{C4}\vdash\mathbf{A}\ \dot\supset\ \mathbf{C4V}\vdash\nu_2(\mathbf{A})),$$
$$\textbf{(3)}\ \dot\forall\, \mathbf{A}\in\mathbf{L}_{C4V}\ (\mathbf{C4V}\vdash\mathbf{A}\equiv\nu_2(\nu_1(\mathbf{A}))),$$
$$\textbf{(4)}\ \dot\forall\, \mathbf{A}\in\mathbf{L}_{C4}\ (\mathbf{C4}\vdash\mathbf{A}\equiv\nu_1(\nu_2(\mathbf{A}))).$$

Зададим перевод ν_1 из множества формул $\mathbf{L}_{C4V}$ языка силлогистики Венна в множество формул $\mathbf{L}_{C4}$ языка силлогистики Лукасевича следующим образом:

$\nu_1(SaaP) = SaP \,\&\, PaS$, $\quad\nu_1(SiiP) = SiP \,\&\, SoP \,\&\, PoS$,
$\nu_1(SaiP) = SaP \,\&\, PoS$, $\quad\nu_1(SeP) = SeP$,
$\nu_1(SiaP) = SoP \,\&\, PaS$, $\quad\nu_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\nu_1(\mathbf{A})$,
$\nu_1(\mathbf{A}\,\nabla\,\mathbf{B}) = \nu_1(\mathbf{A})\,\nabla\,\nu_1(\mathbf{B})$, где ∇ есть $\&$, $\vee$, $\supset$ или $\equiv$.

Зададим далее обратный перевод ν_2 из $\mathbf{L}_{C4}$ в $\mathbf{L}_{C4V}$:

$\nu_2(SaP) = SaaP \vee SaiP$, $\quad\nu_2(SeP) = SeP$,
$\nu_2(SiP) = \neg SeP$, $\quad\nu_2(SoP) = \neg SaaP \,\&\, \neg SaiP$,
$\nu_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\nu_2(\mathbf{A})$, $\quad\nu_2(\mathbf{A}\,\nabla\,\mathbf{B}) = \nu_2(\mathbf{A})\,\nabla\,\nu_2(\mathbf{B})$.

Обоснуем справедливость первого из четырех упомянутых выше утверждений:

Лемма 1.

$$\dot\forall\, \mathbf{A}\in\mathbf{L}_{C4V}\ (\mathbf{C4V}\vdash\mathbf{A}\ \dot\supset\ \mathbf{C4}\vdash\nu_1(\mathbf{A})).$$

Используем возвратную индукцию по длине доказательства формулы **A** в системе **C4V**. Покажем сначала, что ν_1-переводы всех аксиом **C4V** доказуемы в силлогистике **C4**.

V0. Переводы классических тавтологий являются классическими тавтологиями и, в силу наличия в **C4** аксиом **A0**, доказуемы в ней.

V1. $\nu_1((MaaP \,\&\, SaaM) \supset SaaP) =$
$(MaP \,\&\, PaM \,\&\, SaM \,\&\, MaS) \supset (SaP \,\&\, PaS)$.
Доказывается с использованием **A1**.

V2. $\nu_1((MaaP \,\&\, SaiM) \supset SaiP) =$
$(MaP \,\&\, PaM \,\&\, SaM \,\&\, MoS) \supset (SaP \,\&\, PoS)$.

1.	$(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$	**A1**
2.	$(PaS \,\&\, MaP) \supset MaS$	**A1**
3.	$(MaP \,\&\, \neg MaS) \supset \neg PaS$	2; **ЛВ**
4.	$MoS \equiv \neg MaS$	**A7**
5.	$PoS \equiv \neg PaS$	**A7**
6.	$(MaP \,\&\, MoS) \supset PoS$	3, 4, 5; **ЛВ**
7.	$(MaP \,\&\, PaM \,\&\, SaM \,\&\, MoS) \supset (SaP \,\&\, PoS)$	1, 6; **ЛВ**

V3. $\nu_1((MaiP \,\&\, SaaM) \supset SaiP) =$
$(MaP \,\&\, PoM \,\&\, SaM \,\&\, MaS) \supset (SaP \,\&\, PoS)$.
V4. $\nu_1((MaiP \,\&\, SaiM) \supset SaiP) =$
$(MaP \,\&\, PoM \,\&\, SaM \,\&\, MoS) \supset (SaP \,\&\, PoS)$.
Доказываются аналогично случаю **V2**.

V5. $\nu_1((MeP \,\&\, SaaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, SaM \,\&\, MaS) \supset SeP$.
V6. $\nu_1((MeP \,\&\, SaiM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, SaM \,\&\, MoS) \supset SeP$.
Доказываются с использованием **A2**.

V7. $\nu_1(SaaP \supset PaaS) = (SaP \,\&\, PaS) \supset (PaS \,\&\, SaP)$.
V8. $\nu_1(SaiP \supset PiaS) = (SaP \,\&\, PoS) \supset (PoS \,\&\, SaP)$.
V9. $\nu_1(SiaP \supset PaiS) = (SoP \,\&\, PaS) \supset (PaS \,\&\, SoP)$.
Классические тавтологии.

V10. $\nu_1(SiiP \supset PiiS) = (SiP \,\&\, SoP \,\&\, PoS) \supset (PiS \,\&\, PoS \,\&\, SoP)$.
Доказывается с использованием теоремы **C4** $SiP \supset PiS$.

V11. $\nu_1(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$.
Аксиома **A3** системы **C4**.

V12. $\nu_1(SaaS) = SaS \,\&\, SaS$.
Выводится из **A8** и частного случая **A5** – $SiS \supset SaS$.

V13. $\nu_1(\neg(SaaP \,\&\, SaiP)) = \neg(SaP \,\&\, PaS \,\&\, SaP \,\&\, PoS)$,
V14. $\nu_1(\neg(SaaP \,\&\, SiaP)) = \neg(SaP \,\&\, PaS \,\&\, SoP \,\&\, PaS)$,
V15. $\nu_1(\neg(SaaP \,\&\, SiiP)) = \neg(SaP \,\&\, PaS \,\&\, SiP \,\&\, SoP \,\&\, PoS)$,
V16. $\nu_1(\neg(SaiP \,\&\, SiaP)) = \neg(SaP \,\&\, PoS \,\&\, SoP \,\&\, PaS)$,
V17. $\nu_1(\neg(SaiP \,\&\, SiiP)) = \neg(SaP \,\&\, PoS \,\&\, SiP \,\&\, SoP \,\&\, PoS)$.
Доказываются с использованием **A7**.

V18. $\nu_1(\neg(SaaP \,\&\, SeP)) = \neg(SaP \,\&\, PaS \,\&\, SeP)$.
Выводится непосредственно из **A4** и **A6**.

V19. $\nu_1(\neg(SiiP \,\&\, SeP)) = \neg(SiP \,\&\, SoP \,\&\, PoS \,\&\, SeP)$.
Доказывается с использованием **A6**.

V20. $v_1(SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP) =$
$(SaP \,\&\, PaS) \vee (SaP \,\&\, PoS) \vee (SoP \,\&\, PaS) \vee (SiP \,\&\, SoP \,\&\, PoS) \vee SeP$.

1.	$SoP \equiv \neg SaP$	**A7**
2.	$PoS \equiv \neg PaS$	**A7**
3.	$SaP \vee SoP$	1; **ЛВ**
4.	$PaS \vee PoS$	2; **ЛВ**
5.	$(SaP \,\&\, PaS) \vee (SaP \,\&\, PoS) \vee (SoP \,\&\, PaS) \vee (SoP \,\&\, PoS)$	3, 4; **ЛВ**
6.	$(SaP \,\&\, PaS) \vee (SaP \,\&\, PoS) \vee (SoP \,\&\, PaS) \vee (\neg SeP \,\&\, SoP \,\&\, PoS) \vee SeP$	5; **ЛВ**
7.	$SeP \equiv \neg SiP$	**A6**
8.	$v_1(SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP)$	6, 7; **ЛВ**

В силу определения перевода v_1 и наличия в системе **C4** правила *modus ponens* очевидно, что если $v_1(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $v_1(\mathbf{A})$ доказуемы в системе **C4**, то и $v_1(\mathbf{B})$ доказуема в ней.

Таким образом, v_1-переводы всех теорем силлогистики **C4V** являются теоремами **C4**. **Лемма 1** *доказана*.

Тем же методом осуществляем вторую часть доказательства рекурсивной эквивалентности, обосновывая утверждение:

Лемма 2.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{C4}\ (\mathbf{C4} \vdash \mathbf{A} \ \Rightarrow\ \mathbf{C4V} \vdash v_2(\mathbf{A})).$$

Покажем сначала, что v_2-переводы всех аксиом **C4V** доказуемы в силлогистике **C4**.

A0. Рассматривается аналогично пункту **V0**.

A1. $v_2((MaP \,\&\, SaM) \supset SaP) =$
$((MaaP \vee MaiP) \,\&\, (SaaM \vee SaiM)) \supset (SaaP \vee SaiP))$.
Выводится непосредственно из **V1**-**V4**.

A2. $v_2((MeP \,\&\, SaM) \supset SeP) = (MeP \,\&\, (SaaM \vee SaiM)) \supset SeP$.
Выводится непосредственно из **V5** и **V6**.

A3. $v_2(SeP \supset PeS) = SeP \supset PeS$.
Аксиома **V11** системы **C4V**.

A4. $v_2(SaP \supset SiP) = (SaaP \vee SaiP) \supset \neg SeP$.

1.	$(PeS \,\&\, SaiP) \supset SeS$	**V6**
2.	$SeP \supset PeS$	**V11**
3.	$(SaiP \,\&\, SeP) \supset SeS$	1, 2; **ЛВ**

4.	$\neg(SaaS \,\&\, SeS)$	**V18**
5.	$SaaS$	**V12**
6.	$\neg SeS$	4, 5; **ЛВ**
7.	$\neg(SaiP \,\&\, SeP)$	3, 6; **ЛВ**
8.	$\neg(SaaP \,\&\, SeP)$	**V18**
9.	$(SaaP \vee SaiP) \supset \neg SeP$	7, 8; **ЛВ**

A5. $v_2(SiP \supset SaS) = \neg SeP \supset (SaaS \vee SaiS)$.
Доказывается с использованием **V12**.

A6. $v_2(SeP \equiv \neg SiP) = SeP \equiv \neg\neg SeP$.

A7. $v_2(SoP \equiv \neg SaP) = (\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP) \equiv \neg(SaaP \vee SaiP)$.
Классические тавтологии.

A8. $v_2(SiS) = \neg SeS$.

1.	$\neg(SaaS \,\&\, SeS)$	**V18**
2.	$SaaS$	**V12**
3.	$\neg SeS$	1, 2; **ЛВ**

Очевидно также, что если $v_2(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$ и $v_2(\mathbf{A})$ доказуемы в исчислении **C4V**, то и $v_2(\mathbf{B})$ доказуема в нем.

Таким образом, v_2-переводы всех теорем системы **C4** являются теоремами **C4V**. **Лемма 2** *доказана*.

Перейдем к обоснованию третьего утверждения:

Лемма 3.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{C4V}\ (\mathbf{C4V} \vdash \ \mathbf{A} \equiv v_2(v_1(\mathbf{A}))).$$

Используем индукцию по числу пропозициональных связок в формуле **A**. Базис индукции содержит пять случаев.

1) $\mathbf{A} = SaaP$. Тогда $v_2(v_1(\mathbf{A})) = v_2(SaP \,\&\, PaS) =$
$(SaaP \vee SaiP) \,\&\, (PaaS \vee PaiS)$.

1.	$SaaP \supset PaaS$	**V7**
2.	$SaaP \supset ((SaaP \vee SaiP) \,\&\, (PaaS \vee PaiS))$	1; **ЛВ**
3.	$(SaaP \,\&\, (PaaS \vee PaiS)) \supset SaaP$	тавтология **ЛВ**
4.	$PaaS \supset SaaP$	**V7**
5.	$(SaiP \,\&\, PaaS) \supset SaaP$	4; **ЛВ**
6.	$PaiS \supset SiaP$	**V8**
7.	$\neg(SaiP \,\&\, SiaP)$	**V16**
8.	$\neg(SaiP \,\&\, PaiS)$	6, 7; **ЛВ**
9.	$(SaiP \,\&\, PaiS) \supset SaaP$	8; **ЛВ**

10.	$(SaiP \,\&\, (PaaS \vee PaiS)) \supset SaaP$	5, 9; **ЛВ**
11.	$((SaaP \vee SaiP) \,\&\, (PaaS \vee PaiS)) \supset SaaP$	3, 10; **ЛВ**
12.	$SaaP \equiv ((SaaP \vee SaiP) \,\&\, (PaaS \vee PaiS))$	2, 11; **ЛВ**

2) **A** $\eqcirc$ $SaiP$. Тогда $v_2(v_1(\mathbf{A})) = v_2(SaP \,\&\, PoS) =$

$$(SaaP \vee SaiP) \,\&\, \neg PaaS \,\&\, \neg PaiS.$$

1.	$SaiP \supset PiaS$	**V8**
2.	$\neg(PaaS \,\&\, PiaS)$	**V14**
3.	$\neg(PaiS \,\&\, PiaS)$	**V16**
4.	$SaiP \supset (\neg PaaS \,\&\, \neg PaiS)$	1, 2, 3; **ЛВ**
5.	$SaiP \supset ((SaaP \vee SaiP) \,\&\, \neg PaaS \,\&\, \neg PaiS)$	4; **ЛВ**
6.	$(SaiP \,\&\, \neg PaaS \,\&\, \neg PaiS) \supset SaiP$	тавтология **ЛВ**
7.	$SaaP \supset PaaS$	**V7**
8.	$(SaaP \,\&\, \neg PaaS \,\&\, \neg PaiS) \supset SaiP$	7; **ЛВ**
9.	$((SaaP \vee SaiP) \,\&\, \neg PaaS \,\&\, \neg PaiS) \supset SaiP$	6, 8; **ЛВ**
10.	$SaiP \equiv ((SaaP \vee SaiP) \,\&\, \neg PaaS \,\&\, \neg PaiS)$	5, 9; **ЛВ**

3) **A** $\eqcirc$ $SiaP$. Тогда $v_2(v_1(\mathbf{A})) = v_2(SoP \,\&\, PaS) =$

$$\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP \,\&\, (PaaS \vee PaiS).$$

1.	$SiaP \supset PaiS$	**V9**
2.	$\neg(SaaP \,\&\, SiaP)$	**V14**
3.	$\neg(SaiP \,\&\, SiaP)$	**V16**
4.	$SiaP \supset (\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP)$	2, 3; **ЛВ**
5.	$SiaP \supset (\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP \,\&\, (PaaS \vee PaiS))$	1, 4; **ЛВ**
6.	$PaaS \supset SaaP$	**V7**
7.	$(\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP \,\&\, PaaS) \supset SiaP$	6; **ЛВ**
8.	$PaiS \supset SiaP$	**V8**
9.	$(\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP \,\&\, PaiS) \supset SiaP$	8; **ЛВ**
10.	$(\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP \,\&\, (PaaS \vee PaiS)) \supset SiaP$	7, 9; **ЛВ**
11.	$SiaP \equiv (\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP \,\&\, (PaaS \vee PaiS))$	5, 10; **ЛВ**

4) **A** $\eqcirc$ $SiiP$. Тогда $v_2(v_1(\mathbf{A})) = v_2(SiP \,\&\, SoP \,\&\, PoS) =$

$$\neg SeP \,\&\, \neg SaaP \,\&\, \neg SaiP \,\&\, \neg PaaS \,\&\, \neg PaiS.$$

1.	$\neg(SiiP \,\&\, SeP)$	**V19**
2.	$\neg(SaaP \,\&\, SiiP)$	**V15**
3.	$\neg(SaiP \,\&\, SiiP)$	**V17**
4.	$PaaS \supset SaaP$	**V7**
5.	$\neg(PaaS \,\&\, SiiP)$	2, 4; **ЛВ**
6.	$SiiP \supset PiiS$	**V10**

7.	$\neg(PaiS \,\&\, PiiS)$	**V17**
8.	$\neg(PaiS \,\&\, SiiP)$	6, 7; **ЛВ**
9.	$SiiP \supset v_2(v_1(SiiP))$	1, 2, 3, 5, 8; **ЛВ**
10.	$SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP$	**V20**
11.	$(\neg SeP \,\&\, \neg SaaP \,\&\, \neg SaiP \,\&\, \neg SiaP) \supset SiiP$	10; **ЛВ**
12.	$SiaP \supset PaiS$	**V9**
13.	$v_2(v_1(SiiP)) \supset SiiP$	11, 12; **ЛВ**
14.	$SiiP \equiv v_2(v_1(SiiP))$	9, 13; **ЛВ**

5) **A** $\eqcirc$ SeP. Тогда $v_2(v_1(\mathbf{A})) = v_2(SeP) = SeP$.

Формула $SeP \equiv SeP$ – тавтология **ЛВ**.

Индуктивный переход доказывается просто. **Лемма 3** *доказана*.

Перейдем, наконец, к заключительной части доказательства рекурсивной эквивалентности систем **C4V** и **C4** – обоснованию четвертого утверждения:

Лемма 4.

$$\forall\, \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{C4}\ (\mathbf{C4} \vdash \mathbf{A} \equiv v_1(v_2(\mathbf{A}))).$$

Используем, как и в **Лемме 3**, индукцию по числу пропозициональных связок в формуле **A**. Базис индукции содержит теперь четыре случая.

1) **A** $\eqcirc$ SaP. Тогда $v_1(v_2(\mathbf{A})) = v_1(SaaP \vee SaiP) =$

$$(SaP \,\&\, PaS) \vee (SaP \,\&\, PoS).$$

1.	$SaP \equiv ((SaP \,\&\, PaS) \vee (SaP \,\&\, \neg PaS))$	тавтология **ЛВ**
2.	$PoS \equiv \neg PaS$	**A7**
3.	$SaP \equiv ((SaP \,\&\, PaS) \vee (SaP \,\&\, PoS))$	1, 2; **ЛВ**

2) **A** $\eqcirc$ SeP. Тогда $v_1(v_2(\mathbf{A})) = v_1(SeP) = SeP$.

Формула $SeP \equiv SeP$ – тавтология **ЛВ**.

3) **A** $\eqcirc$ SiP. Тогда $v_1(v_2(\mathbf{A})) = v_1(\neg SeP) = \neg SeP$.

Формула $SiP \equiv \neg SeP$ доказывается с использованием **A6**.

4) **A** $\eqcirc$ SoP. Тогда $v_1(v_2(\mathbf{A})) = v_1(\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP) =$

$$\neg(SaP \,\&\, PaS) \,\&\, \neg(SaP \,\&\, PoS).$$

Продолжим рассуждение первого базисного случая:

4.	$\neg SaP \equiv \neg(SaP \,\&\, PaS) \,\&\, \neg(SaP \,\&\, PoS)$	3; **ЛВ**
5.	$SoP \equiv \neg SaP$	**A7**
6.	$SoP \equiv \neg(SaP \,\&\, PaS) \,\&\, \neg(SaP \,\&\, PoS)$	4, 5; **ЛВ**

Индуктивный переход тривиален. **Лемма 4** *доказана*.

Из **Лемм 1-4** вытекает справедливость метаутверждения:

Метатеорема 1.
Силлогистика **C4V** *рекурсивно эквивалентна исчислению* **C4**: *перевод* ν_1 *погружает* **C4V** *в* **C4**, *а перевод* ν_2 *погружает* **C4** *в* **C4V**.

Для установления метатеоретических отношений между силлогистикой **C4V** и классическим исчислением предикатов (**ИП**) зададим следующую функцию Ξ из $\mathbf{L}_{C4V}$ в множество формул **ИП**:

$$\Xi(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \exists x S_n x) \supset \nu_1(\mathbf{A})^*,$$

где **A** – произвольная формула языка системы **C4V**, $S_1,\ldots, S_n$ – список всех терминов (универсалий) в составе **A**, а * – стандартный, «фундаментальный» перевод из языка чистой позитивной силлогистики в язык логики предикатов, заданный в §1 Главы III и погружающий систему **СФ** в **ИП**.

Метатеорема 2.
Перевод Ξ *погружает силлогистику* **C4V** *в классическое исчисление предикатов*.

Покажем для произвольной формулы $\mathbf{A} \in \mathbf{L}_{C4V}$, что ее доказуемость в системе **C4V** (**C4V** $\vdash$ **A**) равносильна доказуемости в исчислении предикатов ее Ξ-перевода (**ИП** $\vdash \Xi(\mathbf{A})$):

C4V $\vdash$ **A**, е.т.е. **C4** $\vdash \nu_1(\mathbf{A})$ (в силу **Метатеоремы 1**), е.т.е. **ИП** $\vdash \Theta(\nu_1(\mathbf{A}))$ (в силу **Метатеоремы 15** Главы III), е.т.е. **ИП** $\vdash (\exists x S_1 x \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \exists x S_n x) \supset \nu_1(\mathbf{A})^*$ (по определению перевода Θ в §4 Главы III), е.т.е. **ИП** $\vdash \Xi(\mathbf{A})$ (по определению перевода Ξ).

В ходе рассуждения используется очевидный факт совпадения множеств терминов в составе формул **A** и $\nu_1(\mathbf{A})$, который вытекает из определения перевода ν_1. **Метатеорема 2** *доказана*.

В языке с исходными константами ***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e*** могут быть сформулированы и другие силлогистические теории. Особый интерес представляет построение «фундаментального» варианта силлогистики указанного типа. С семантической точки зрения, переход от «традиционной» к «фундаментальной» версии силлогистики венновского типа заключается в отказе от принятия исходного допущения о непустоте субъектов и предикатов высказываний. Однако при этом сами трактовки силлогистических констант, по существу, остаются прежними: ***aa*** репрезентирует равенство объемов терминов, ***ai*** – строгое включе-

ние объема субъекта в объем предиката, ***ia*** – строгое включение объема предиката в объем субъекта, ***ii*** – перекрещивание объемов терминов, ***e*** – их объемную несовместимость.

Данная семантика формализуется исчислением **СФV**, дедуктивными постулатами которого являются правило вывода *modus ponens*, схемы аксиом **V0**, **V1-V17**, **V19-V20** системы **C4V**, а также две дополнительные схемы аксиом:

V21. $SeS \supset SeP$, **V22**. $SeS \supset (SaaP \vee SaiP)$.

Формулы указанных типов являются теоремами **C4V**, а формулы типа **V18** недоказуемы в **СФV**, поэтому силлогистика **СФV** является подсистемой силлогистики **C4V**, но не наоборот.

Покажем рекурсивную эквивалентность системы **СФV**, сформулированную в языке с исходными константами ***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e***, и стандартной позитивной силлогистики **СФ**. При этом будем применять тот же самый метод, что и в доказательстве **Метатеоремы 1**. Более того, в качестве переводов из «венновского» языка в стандартный и обратно будем использовать те же самые функции ν_1 и ν_2.

Метатеорема 3.
Система **СФV** *рекурсивно эквивалентна исчислению* **СФ**: *перевод* ν_1 *погружает* **СФV** *в* **СФ**, *а перевод* ν_2 *погружает* **СФ** *в* **СФV**.

В первой части доказательства демонстрируем справедливость утверждения $\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{\text{СФ}V}$ (**СФV** $\vdash \mathbf{A} \supset$ **СФ** $\vdash \nu_1(\mathbf{A})$).

Обратим внимание на то, что в **Лемме 1** в доказательствах ν_1-переводов аксиом **V0**, **V1-V11**, **V13-V17**, **V19-V20** используются только аксиомы и теоремы системы **СФV**, поэтому эти доказательства правомерны не только в исчислении **C4V**, но также и в **СФV**.

Остается продемонстрировать доказуемость ν_1-переводов аксиом **V12**, **V21** и **V22** в системе **СФ**.

V12. $\nu_1(SaaS) = SaS \mathbin{\&} SaS$.
Выводится из **СФ4** – SaS.

V21. $\nu_1(SeS \supset SeP) = SeS \supset SeP$.

1.	$SiP \supset SiS$	**СФ5**
2.	$SeP \equiv \neg SiP$	**СФ7**
3.	$SeS \equiv \neg SiS$	**СФ7**
4.	$SeS \supset SeP$	1, 2, 3; **ЛВ**

V22. $v_1(SeS \supset (SaaP \vee SaiP)) = SeS \supset ((SaP \,\&\, PaS) \vee (SaP \,\&\, PoS))$.

1.	$SoP \supset SiS$	**СФ6**
2.	$SoP \equiv \neg SaP$	**СФ8**
3.	$SeS \equiv \neg SiS$	**СФ7**
4.	$SeS \supset SaP$	1, 2, 3; **ЛВ**
5.	$PoS \equiv \neg PaS$	**СФ8**
6.	$PaS \vee PoS$	5; **ЛВ**
7.	$SaP \equiv (SaP \,\&\, (PaS \vee PoS))$	6; **ЛВ**
8.	$SeS \supset ((SaP \,\&\, PaS) \vee (SaP \,\&\, PoS))$	4, 7; **ЛВ**

Во второй части доказательства метатеоремы обосновываем утверждение $\dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{\text{СФ}}$ (**СФ** $\vdash \mathbf{A}$ $\dot\supset$ **СФV** $\vdash v_2(\mathbf{A})$).

Доказательства v_2-переводов аксиом **СФ0**, **СФ1**, **СФ2**, **СФ3**, **СФ7** и **СФ8** приведено в **Лемме 2** в пунктах **А0**, **А1**, **А2**, **А3**, **А6** и **А7** соответственно. Остается доказать в **СФV** v_2-переводы аксиом **СФ4**, **СФ5** и **СФ6** системы **СФ**.

СФ4. $v_2(SaS) = SaaS \vee SaiS$.

Выводится из **V12** – $SaaS$.

СФ5. $v_2(SiP \supset SiS) = \neg SeP \supset \neg SeS$.

Доказывается с использованием **V21**.

СФ6. $v_2(SoP \supset SiS) = (\neg SaaP \,\&\, \neg SaiP) \supset \neg SeS$.

Доказывается с использованием **V22**.

Третья часть доказательства метатеоремы – обоснование справедливости утверждения $\dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{\text{СФV}}$ (**СФV** $\vdash \mathbf{A} \equiv v_2(v_1(\mathbf{A}))$).

Повторяем в точности все рассуждения **Леммы 3**. Все доказательства данной леммы исходят только из постулатов системы **СФV**.

Наконец, в четвертой, заключительной части доказательства метатеоремы показываем, что $\dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{\text{СФ}}$ (**СФ** $\vdash \mathbf{A} \equiv v_1(v_2(\mathbf{A}))$).

Повторяем в точности все рассуждения **Леммы 4**. Приводимые там доказательства имеют место не только применительно к **С4**, но и к ее подсистеме **СФ**, поскольку в них используются лишь постулаты **СФ** и их следствия. **Метатеорема 3** *доказана*.

Метатеорема 4.

Система **СФV** *погружается в классическое исчисление предикатов посредством композиции функций* v_1 *и* *, *т.е.* $\dot\forall \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{\text{СФV}}$ (**СФV** $\vdash \mathbf{A}$, *е.т.е.* **ИП** $\vdash v_1(\mathbf{A})^*$).

Данное утверждение непосредственно вытекает из **Метатеоремы 3** и погружаемости силлогистики **СФ** в исчисление предикатов посредством перевода *, доказанной в §1 Главы III.

Приведем $v_1(\mathbf{A})^*$ для элементарных высказываний системы **СФV**, т.е. адекватную их трактовку в логике предикатов:

$v_1(SaaP)^* = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \forall x(Px \supset Sx)$,
$v_1(SaiP)^* = \forall x(Sx \supset Px) \,\&\, \exists x(Px \,\&\, \neg Sx)$,
$v_1(SiaP)^* = \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \,\&\, \forall x(Px \supset Sx)$,
$v_1(SiiP)^* = \exists x(Sx \,\&\, Px) \,\&\, \exists x(Sx \,\&\, \neg Px) \,\&\, \exists x(Px \,\&\, \neg Sx)$,
$v_1(SeP)^* = \forall x(Sx \supset \neg Px)$.

Зададимся вопросом, какая из силлогистик – **С4V** или **СФV** – более адекватно выражает логические идеи самого Дж. Венна. Для этого следует выделить силлогистические законы, явно принимаемые им.

Венн осуществляет подробный анализ лишь одной разновидности законов силлогистического типа, а именно, модусов I фигуры категорического силлогизма в языке с константами ***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e***. Он выделяет 13 правильных модусов, обосновывая их с помощью круговых диаграмм, и демонстрирует некорректность остальных модусов I фигуры, также опираясь на семантику высказываний.

Эти 13 правильных венновских модусов доказуемы как в силлогистике **С4V**, так и в **СФV**, а некорректные модусы I фигуры не являются теоремами ни в одной из двух систем.

Правомерность или неправомерность остальных силлогистических утверждений можно оценить, во-первых, так же, как сам Венн – с опорой на принимаемую им семантику, и во-вторых, исходя из релевантных данному вопросу замечаний, содержащихся в текстах Венна.

Заметим, что Венном предлагаются две интерпретации элементарных высказываний. О первой из них, базирующейся на круговых диаграммах, уже было сказано выше. Вторая фактически представляет собой перевод этих высказываний в алгебру множеств:

$SaaP \rightarrow S\overline{P} = \varnothing \;\&\; \overline{S}P = \varnothing$,
$SaiP \rightarrow S\overline{P} = \varnothing \;\&\; \overline{S}P \neq \varnothing$,
$SiaP \rightarrow \overline{S}P = \varnothing \;\&\; S\overline{P} \neq \varnothing$,
$SiiP \rightarrow SP \neq \varnothing \;\&\; S\overline{P} \neq \varnothing \;\&\; \overline{S}P \neq \varnothing$,
$SeP \rightarrow SP = \varnothing$.

Несложно установить, что эквивалентная запись указанных алгебраических выражений в языке логики предикатов оказывается равносильной в этой теории приведенной выше трактовке элементарных силлогистических формул посредством композиции переводов v_1 и *.

И диаграммная, и алгебраическая семантика позволяют обосновать справедливость обращений в силлогистике Венна всех пяти типов элементарных высказываний: высказывания типов ***aa***, ***ii*** и ***e*** обращаются простой перестановкой терминов, ***ai*** обращается в ***ia***, а ***ia*** – в ***ai***. Аналоги всех этих законов обращения доказуемы и **С4V**, и в **СФV**.

Более того, в силлогистике Венна посылка и заключение при операции обращения в каждом из пяти случаев эквивалентны друг другу. Это обстоятельство имеет важные следствия применительно к простым категорическим силлогизмам II, III и IV фигур:

– из правильного модуса I фигуры посредством обращения большей посылки получается правильный модус II фигуры;
– из правильного модуса I фигуры посредством обращения меньшей посылки получается правильный модус III фигуры;
– из правильного модуса I фигуры посредством обращения сразу обеих посылок получается правильный модус IV фигуры;
– из неправильного модуса I фигуры посредством обращения одной или сразу обеих посылок получается неправильный модус.

Таким образом, в силлогистике Венна корректны в точности 52 модуса категорического силлогизма – по 13 в каждой фигуре. И все эти модусы доказуемы как в системе **С4V**, так и в **СФV**. Налицо разительный контраст с тем, что мы наблюдаем в чистых позитивных силлогистиках, формулируемых в языке со стандартными константами. Напомним, что из 24 модусов, корректных в обычной традиционной силлогистике, лишь 15 можно считать правильными в силлогистике фундаментальной.

Перейдем к другим постулатам рассмотренных силлогистик. Одна из версий закона силлогистического тождества – ***SaaS*** – также может быть обоснована и с помощью диаграмм, и при алгебраической ее трактовке. Постулат ***SaaP*** ∨ ***SaiP*** ∨ ***SiaP*** ∨ ***SiiP*** ∨ ***SeP*** – мы назвали его законом исключенного шестого – при «алгебраическом» переводе становится выражением вида (**A** & **B**) ∨ (**A** & ¬**B**) ∨ (**B** & ¬**A**) ∨ (¬**C** & ¬**A** & ¬**B**) ∨ **C**, которое является классической тавтологией. В диаграммной семантике общезначимость дизъюнктивной силлогистической формулы может быть обоснована тем обстоятельством, что на каждой из пяти диаграмм истинен какой-нибудь ее дизъюнктивный член. Указанные силлогистические утверждения опять-таки являются законами обеих теорий – **С4V** и **СФV**.

Различия между этими силлогистиками обнаруживаются в связи с «законами противоположностей», которые имеют вид ¬(***SγP*** & ***SφP***), где ***γ*** и ***φ*** – отличные друг от друга силлогистические константы из множества {***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e***}. В системе **С4V** доказуемы формулы всех указанных типов, а в **СФV** формулы некоторых типов не доказуемы, а именно, ¬(***SaaP*** & ***SeP***), ¬(***SaiP*** & ***SeP***) и ¬(***SiaP*** & ***SeP***).

Какую же позицию занимал сам Венн по поводу принятия или непринятия этих законов? На этот вопрос, на наш взгляд, нет однозначного ответа. Именно в этом пункте проявляются различия между диаграммной и алгебраической интерпретацией венновских элементарных высказываний.

С одной стороны, вводя диаграммы Венн четко и недвусмысленно заявляет, что каждому элементарному высказыванию – ***SaaP***, ***SaiP***, ***SiaP***, ***SiiP*** и ***SeP*** – соответствует ровно одна диаграмма, причем она соответствует только ему и никакому из остальных четырех высказываний. Именно поэтому высказывания указанных типов попарно несовместимы по истинности. Данный тезис Венна в скрытом виде содержит предпосылку экзистенциального характера – о непустоте терминов в составе элементарных высказываний. Действительно, если допустить что термины могут оказаться пустыми, этот тезис становится ложным. Так, высказывания ***SaaP*** и ***SeP*** при пустых *S* и *P* оказываются одновременно истинными на двух диаграммах – **I** и **V**. Аналогично, высказывания ***SaiP*** и ***SeP*** при пустом *S* и непустом *P* одновременно истинны на диаграммах **II** и **V**, а высказывания ***SiaP*** и ***SeP*** при непустом *S* и пустом *P* – на диаграммах **III** и **V**.

С другой стороны, та алгебро-логическая теория, в язык которой Венн переводит элементарные высказывания и которую он и называет Символической логикой, отличая ее от «обычной» традиционной логики, вовсе не предполагает принятия предпосылки о непустоте терминов. Этому можно найти текстуальные подтверждения. Например, Венн не считает контрарными стандартные категорические высказывания типов «Все *S* есть *P*» и «Ни один *S* не есть *P*». Одновременное их принятие, согласно Венну, попросту означает, что термин *S* имеет пустой объем [90, с. 145]. Отказ от указанной экзистенциальной предпосылки влечет исключение из числа логических законов утверждений видов ¬(***SaaP*** & ***SeP***), ¬(***SaiP*** & ***SeP***) и ¬(***SiaP*** & ***SeP***). Алгебраические аналоги остальных «законов противоположностей» оказываются верными и в Символической логике Венна.

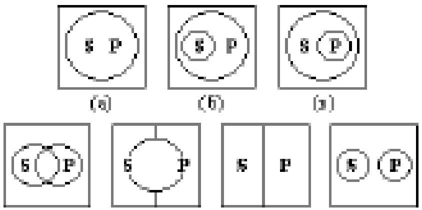
Подводем итог сказанному. Приведенные выше рассуждения показывают, что логические идеи Венна позволяют развить в языке с неходными константами ***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ii***, ***e*** силлогистические теории в двух различных вариантах: «традиционном», формализуемом системой **C4V**, и «фундаментальном», формализуемом исчислением **CΦV**. Очень важен и тот факт, что эти два варианта силлогистики Венна имеют, в отличие от аналогичных систем обычной позитивной силлогистики солидную общую основу: одни и те же принципы обращения высказываний, одни и те же корректные категорические силлогизмы, а также и некоторые другие одинаковые законы.

§ 3. Обобщение силлогистики Венна

В предыдущем параграфе рассматривалась силлогистика, содержащая пять исходных форм атрибутивных высказываний, каждой из которых соответствует ровно одна собственная круговая диаграмма, на которой соответствующее высказывание истинно. Эти пять диаграмм фиксируют все возможные типы отношений между объемами субъекта и предиката при принятии предпосылки о непустоте терминов. Их часто используют в качестве семантики при выделении законов и проверке рассуждений в традиционной силлогистике.

Однако сказанное справедливо лишь для такого фрагмента традиционной силлогистики, который мы называем чистым позитивным. В выделенных ранее диаграммах отсутствует универсальная предметная область, поэтому они непригодны для построения адекватной семантики негативных силлогистик, в языке которых содержится оператор терминного отрицания, и обобщенных позитивных силлогистик, рассмотренных в Главе IV, где в языке имеются силлогистические константы, фиксирующие определенные отношения объемов терминов к универсуму. Адекватным семантическим аппаратом для указанных теорий являются диаграммы (модельные схемы) с универсумом.

Если принять допущение о непустоте и неуниверсальности терминов в составе атрибутивных высказываний, то всего существует семь диаграмм с фиксированным универсальным классом:



(а) (б) (в)

(г) (д) (е) (ж)

Сравнивая эти модельные схемы со стандартными диаграммами Эйлера–Жергонна можно установить следующее. Схеме (а) соответствует диаграмма I, схеме (б) – диаграмма II, схеме (в) – диаграмма III. Схемы (г) и (д) суть различные варианты диаграммы IV, на диаграмме (д) в отличие от (г), объединение объемов *S* и *P* совпадает с универсальным классом. Схемы (е) и (ж) – это различные варианты диаграммы V, на диаграмме (е) в отличие от (ж), объединение объемов *S* и *P* совпадает с универсумом. В логическом учении о понятии соответствующие объемные отношения между двумя непустыми и неуниверсальными терминами иногда называют так: (а) – равнообъемность, (б) – подчинение первого второму, (в) – подчинение второго первому, (г) – перекрещивание, (д) – дополнительность, (е) – противоречие, (ж) – соподчинение (См., например, [13]).

Естественным образом возникает идея обобщения силлогистики Венна на случай модельных схем с универсумом. В этой силлогистике должно быть семь исходных силлогистических констант, причем каждая из них должна репрезентировать ровно один и свой собственный тип отношений между объемами субъекта и предиката на диаграммах (а)–(ж). Принятие в семантике данной теории только этих семи «экзистенциально нагруженных» модельных схем приводит к тому, что она будет представлять собой некий вариант традиционной силлогистики. Подобная силлогистическая теория была предложена В.И. Маркиным [45]. Мы изложим ее здесь в несколько измененном виде.

В алфавит данной силлогистики входят семь констант:

– ***aa***, соответствующая модельной схеме (а);
– ***ai***, соответствующая модельной схеме (б);
– ***ia***, соответствующая модельной схеме (в);
– ***ij***, соответствующая модельной схеме (г);
– ***iu***, соответствующая модельной схеме (д);
– ***eu***, соответствующая модельной схеме (е);
– ***ej***, соответствующая модельной схеме (ж).

Буквы ***u*** и ***j*** в составе перечисленных констант используются для фиксации того факта, что на соответствующих диаграммах объемы терминов исчерпывают (в случае ***u***) или не исчерпывают (в случае ***j***) универсум. Именно такая интерпретация связывалась с константами ***u*** и ***j*** в обобщенных силлогистиках Главы IV.

Кроме семи силлогистических констант в язык данной теории входит бесконечный список простых универсалий, стандартные пропозициональные связки и скобки. Элементарные формулы языка могут иметь один из семи видов: ***SaaP***, ***SaiP***, ***SiaP***, ***SijP***, ***SiuP***, ***SeuP*** или

SejP. Сложные формулы образуются обычным образом с помощью пропозициональных связок. Заметим, что семь типов элементарных формул данного языка рассматривались А. Де Морганом [74] в его учении о суждении, а выводы из них анализировались в его учении о силлогизме.

Таким образом, язык данной теории не содержит терминообразующих операторов (типа терминного отрицания) и сингулярных терминов, поэтому данную теорию следует отнести к классу *чистых позитивных* силлогистик. Поскольку среди ее констант имеются такие, которые, с семантической точки зрения, содержат отсылку к универсальному классу, данная теория должна быть квалифицирована как *обобщенная* силлогистика. Наконец, отсутствие в алфавите обычных констант ***a***, ***e***, ***i***, ***o*** (а также специфичных для обобщенных силлогистик констант ***u*** и ***j***) свидетельствует о том, что это силлогистика *с нестандартными константами*.

Используя диаграммы (а)–(ж) в качестве семантики сформулированного только что языка, можно выделить наиболее значимые законы и формы правильных рассуждений данной силлогистической теории. В этой силлогистике корректны:

– 128 модусов категорического силлогизма (по 32 модуса для каждой фигуры),
– правила обращения для всех семи типов высказываний (***aa***, ***ij***, ***iu***, ***eu*** и ***ej*** обращаются простой перестановкой терминов, ***ai*** обращается в ***ia***, а ***ia*** – в ***ai***),
– закон силлогистического тождества *SaaS*,
– законы противоположностей вида $\neg(S\gamma P \,\&\, S\varphi P)$, где γ и φ – отличные друг от друга силлогистические константы из множества {***aa***, ***ai***, ***ia***, ***ij***, ***iu***, ***eu***, ***ej***},
– закон «исключенного восьмого» $SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SijP \vee SiuP \vee SeuP \vee SejP$.

Аксиоматическое исчисление, строящееся, как и ранее, на базе классического исчисления высказываний и формализующее данную силлогистическую теорию, назовем **OC4V**. Схемами аксиом этой системы являются:

OV0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,
OV1. $(MaaP \,\&\, SaaM) \supset SaaP$,
OV2. $(MaaP \,\&\, SaiM) \supset SaiP$,
OV3. $(MaaP \,\&\, SiaM) \supset SiaP$,
OV4. $(MaaP \,\&\, SiuM) \supset SiuP$,

OV5. $(MaaP \,\&\, SeuM) \supset SeuP$,
OV6. $(MaaP \,\&\, SejM) \supset SejP$,
OV7. $(MaiP \,\&\, SaiM) \supset SaiP$,
OV8. $(MaiP \,\&\, SiuM) \supset SiuP$,
OV9. $(MaiP \,\&\, SeuM) \supset SiuP$,
OV10. $(MiaP \,\&\, SeuM) \supset SejP$,
OV11. $(MiaP \,\&\, SejM) \supset SejP$,
OV12. $(MiuP \,\&\, SeuM) \supset SaiP$,
OV13. $(MiuP \,\&\, SejM) \supset SaiP$,
OV14. $(MeuP \,\&\, SeuM) \supset SaaP$,
OV15. $(MeuP \,\&\, SejM) \supset SaiP$,
OV16. $SaaP \supset PaaS$,
OV17. $SaiP \supset PiaS$,
OV18. $SiaP \supset PaiS$,
OV19. $SijP \supset PijS$,
OV20. $SiuP \supset PiuS$,
OV21. $SeuP \supset PeuS$,
OV22. $SejP \supset PejS$,
OV23. $SaaS$,
OV24. $\neg(SaaP \,\&\, SiaP)$,
OV25. $\neg(SaaP \,\&\, SijP)$,
OV26. $\neg(SaaP \,\&\, SiuP)$,
OV27. $\neg(SaaP \,\&\, SeuP)$,
OV28. $\neg(SaaP \,\&\, SejP)$,
OV29. $\neg(SaiP \,\&\, SiaP)$,
OV30. $\neg(SaiP \,\&\, SijP)$,
OV31. $\neg(SijP \,\&\, SiuP)$,
OV32. $\neg(SijP \,\&\, SeuP)$,
OV33. $\neg(SijP \,\&\, SejP)$,
OV34. $\neg(SiuP \,\&\, SeuP)$,
OV35. $\neg(SiuP \,\&\, SejP)$,
OV36. $\neg(SeuP \,\&\, SejP)$,
OV37. $SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SijP \vee SiuP \vee SeuP \vee SejP$.

Единственное правило вывода в системе **OC4V** – *modus ponens*.

Данная система является обобщением исчисления **C4V** несколько в ином смысле, чем **OC4**, рассмотренная в Главе IV, является обобщением **C4**. Силлогистика **C4** суть подсистема **OC4**, в то время как **C4V** не есть подсистема **OC4V**, поскольку формулы видов *SiP* и *SeP* языка первой теории попросту отсутствуют в языке второй. Об обобщении тут может идти речь в том плане, что переход от **C4V** к **OC4V** – это переход от силлогистики, допускающей семантику с диаграммами без фиксированного универсума к диаграммной семантике с фиксированным универсумом. Кроме того, в силлогистике **OC4V** сохраняется основная идея, лежащая в основе силлогистики Венна **C4V**: рассматривать в качестве исходных такие силлогистические константы, которые соответствуют ровно одной модельной схеме.

Можно доказать рекурсивную эквивалентность исчислений **OC4V** и **OC4**, используя метод, применявшийся в предыдущем параграфе при доказательстве **Метатеоремы 1**.

Меняем области определения и области значения функций ν_1 и ν_2 из предыдущего параграфа: ν_1 теперь представляет собой перевод из множества формул $\mathbf{L}_{OC4V}$ языка системы **OC4V** в множество формул $\mathbf{L}_{OC4}$ языка системы **OC4**, а ν_2 – перевод из $\mathbf{L}_{OC4}$ в $\mathbf{L}_{OC4V}$.

Перевод ν_1 задается теперь так:

$\nu_1(SaaP) = SaP \,\&\, PaS$, $\qquad$ $\nu_1(SiuP) = SiP \,\&\, SuP$,
$\nu_1(SaiP) = SaP \,\&\, PoS$, $\qquad$ $\nu_1(SeuP) = SeP \,\&\, SuP$,
$\nu_1(SiaP) = SoP \,\&\, PaS$, $\qquad$ $\nu_1(SejP) = SeP \,\&\, SjP$,
$\nu_1(SijP) = SiP \,\&\, SoP \,\&\, PoS \,\&\, SjP$, $\qquad$ $\nu_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\nu_1(\mathbf{A})$,
$\nu_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \nu_1(\mathbf{A}) \nabla \nu_1(\mathbf{B})$, где ∇ есть $\&$, $\vee$, $\supset$ или $\equiv$.

Может возникнуть естественный вопрос: не следует ли для соответствия ν_1-переводов модельным схемам (а)–(ж) конъюнктивно присоединить к переводам $SaaP$, $SaiP$, $SiaP$ формулу $SiP \,\&\, SjP$, а к переводам $SiuP$, $SeuP$, $SejP$ формулу $SoP \,\&\, PoS$. Однако в этом нет необходимости, поскольку соответствующая информация имплицитно уже содержится в обобщенной традиционной силлогистике **OC4** в ν_1-переводах соответствующих элементарных формул. Последнее утверждение вытекает из наличия в системе **OC4** следующих теорем:

$SaP \supset SiP$, $\quad$ $SaP \supset SjP$, $\quad$ $PaS \supset SiP$, $\quad$ $PaS \supset SjP$,
$SuP \supset SoP$, $\quad$ $SuP \supset PoS$, $\quad$ $SeP \supset SoP$, $\quad$ $SeP \supset PoS$.

Обратный перевод ν_2 из $\mathbf{L}_{OC4V}$ в $\mathbf{L}_{OC4}$ определяется теперь следующим образом:

$\nu_2(SaP) = SaaP \vee SaiP$, $\qquad$ $\nu_2(SiP) = \neg SeuP \,\&\, \neg SejP$,
$\nu_2(SeP) = SeuP \vee SejP$, $\qquad$ $\nu_2(SoP) = \neg SaaP \,\&\, \neg SaiP$,
$\nu_2(SuP) = SiuP \vee SeuP$, $\qquad$ $\nu_2(SjP) = \neg SiuP \,\&\, \neg SeuP$,
$\nu_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\nu_2(\mathbf{A})$, $\qquad$ $\nu_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \nu_2(\mathbf{A}) \nabla \nu_2(\mathbf{B})$.

Далее можно доказать четыре метаутверждения:

(1) $\dot\forall\, \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{OC4V}$ (**OC4V** $\vdash \mathbf{A} \;\dot\supset\;$ **OC4** $\vdash \nu_1(\mathbf{A})$),
(2) $\dot\forall\, \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{OC4}$ (**OC4** $\vdash \mathbf{A} \;\dot\supset\;$ **OC4V** $\vdash \nu_2(\mathbf{A})$),
(3) $\dot\forall\, \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{OC4V}$ (**OC4V** $\vdash \mathbf{A} \equiv \nu_2(\nu_1(\mathbf{A}))$),
(4) $\dot\forall\, \mathbf{A} \in \mathbf{L}_{OC4}$ (**OC4** $\vdash \mathbf{A} \equiv \nu_1(\nu_2(\mathbf{A}))$).

Доказательство осуществляется по тому же плану, как и в **Леммах 1–4** предыдущего параграфа. В силу громоздкости мы его опускаем. Из этих четырех метаутверждений следует:

Метатеорема 5.
Система **OC4V** *рекурсивно эквивалентна исчислению* **OC4**: *модифицированный перевод* ν_1 *погружает* **OC4V** *в* **OC4**, *а модифицированный перевод* ν_2 *погружает* **OC4** *в* **OC4V**.

Зададим далее функцию Ξ', сопоставляющую формулам обобщенной венновской силлогистики формулы языка логики предикатов:

$$\Xi'(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \,\&\, \exists x \neg S_1 x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x S_n x \,\&\, \exists x \neg S_n x) \supset \nu_1(\mathbf{A})^*,$$

где **A** – произвольная формула языка **OC4V**, а $S_1,\ldots, S_n$ – список всех универсалий в составе **A**, ν_1 – заданный в данном параграфе перевод из **OC4V** в **OC4**, а * – «фундаментальный» перевод из языка обобщенной позитивной силлогистики в язык логики предикатов, заданный в §1 Главы IV и погружающий систему **OCФ** в исчисление предикатов.

Метатеорема 6.
Перевод Ξ' *погружает силлогистику* **OC4V** *в классическое исчисление предикатов*.

Покажем, что произвольная формула $\mathbf{A} \in \mathbf{L}_{OC4V}$ доказуема в системе **OC4V** (**OC4V** $\vdash$ **A**) тогда и только тогда, когда в исчислении предикатов доказуем ее Ξ'-перевод (**ИП** $\vdash \Xi'(\mathbf{A})$):

OC4V $\vdash$ **A**, е.т.е. **OC4** $\vdash \nu_1(\mathbf{A})$ (в силу **Метатеоремы 5**), е.т.е. **ИП** $\vdash \Theta'(\nu_1(\mathbf{A}))$ (в силу **Метатеорема 12** Главы IV), е.т.е. **ИП** $\vdash (\exists x S_1 x \,\&\, \exists x \neg S_1 x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x S_n x \,\&\, \exists x \neg S_n x) \supset \nu_1(\mathbf{A})^*$ (по определению перевода Θ' в §5 Главы IV), е.т.е. **ИП** $\vdash \Xi'(\mathbf{A})$ (по определению перевода Ξ').

В ходе рассуждения мы опирались на то, что множества терминов в составе **A** и $\nu_1(\mathbf{A})$ совпадают; этот факт вытекает из определения перевода ν_1. **Метатеорема 6** *доказана*.

Глава VI

ЧИСТЫЕ НЕГАТИВНЫЕ СИЛЛОГИСТИКИ

§ 1. Фундаментальная негативная силлогистика

В Главе I отмечалось, что системы чистой негативной силлогистики строятся в языке, который получается из языка чистой позитивной силлогистики за счет введения особого рода терминообразующего оператора – оператора терминного отрицания ~. Он позволяет образовывать негативный общий термин (универсалию) $\sim S$ из произвольного общего термина S (как простого, позитивного, так и сложного, негативного). Формулы этого языка на позициях субъектов и предикатов могут содержать любые универсалии – и позитивные, и негативные.

Существует множество систем чистой негативной силлогистики. С семантической точки зрения, они различаются условиями истинности и ложности элементарных формул. В виде исчислений эти системы обычно формулируются как надстройки над соответствующими системами чистой позитивной силлогистики.

Обзор систем чистой негативной силлогистики начнем с ее «фундаментального» варианта. А. Ведбергом [94] была построена аксиоматическая система на базе классического исчисления высказываний, которая представляла собой вариант логики классов и характеризовалась Дж. Шефердсоном [82] как теория включения и дополнения для произвольных классов. В качестве знака отношения включения рассматривалась силлогистическая константа $\boldsymbol{a}$, а в качестве знака операции дополнения – терминное отрицание ~. Собственными аксиомами системы Ведберга являются формулы следующих типов:

1. $S\boldsymbol{a}{\sim}{\sim}S$,

2. ${\sim}{\sim}S\boldsymbol{a}S$,

3. $(S\boldsymbol{a}M \,\&\, M\boldsymbol{a}P) \supset S\boldsymbol{a}P$,

4. $S\boldsymbol{a}P \supset {\sim}P\boldsymbol{a}{\sim}S$,

5. $S\boldsymbol{a}{\sim}S \supset S\boldsymbol{a}P$.

Дж. Шефердсон [82] предложил расширение системы Ведберга до теории включения и дополнения для подклассов непустого класса. Фактически речь здесь идет о логике классов для непустой предметной области. Указанное расширение получается за счет присоединения дополнительных аксиом следующего вида:

6. $\neg(S\boldsymbol{a}P \,\&\, S\boldsymbol{a}{\sim}P)$.

В рамках полученного исчисления – в согласии с семантикой фундаментальной негативной силлогистики – с использованием константы $\boldsymbol{a}$ могут быть естественным образом определены остальные стандартные силлогистические константы:

$$S\boldsymbol{e}P \equiv_{df} S\boldsymbol{a}{\sim}P, \qquad S\boldsymbol{i}P \equiv_{df} \neg S\boldsymbol{a}{\sim}P, \qquad S\boldsymbol{o}P \equiv_{df} \neg S\boldsymbol{a}P.$$

Другой вариант аксиоматического исчисления, формализующего фундаментальную чистую негативную силлогистику предложен А.А. Ильиным [18]. Исходными в этом исчислении (будем называть его **НСФ**) являются все четыре стандартные силлогистические константы – $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{o}$.

Система **НСФ** содержит следующие схемы аксиом:

НСФ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

НСФ1. $(M\boldsymbol{a}P \,\&\, S\boldsymbol{a}M) \supset S\boldsymbol{a}P$,

НСФ2. $S\boldsymbol{i}P \supset P\boldsymbol{i}S$,

НСФ3. $S\boldsymbol{a}S$,

НСФ4. $S\boldsymbol{i}P \supset S\boldsymbol{i}S$,

НСФ5. $S\boldsymbol{e}P \equiv \neg S\boldsymbol{i}P$,

НСФ6. $S\boldsymbol{o}P \equiv \neg S\boldsymbol{a}P$,

НСФ7. $S\boldsymbol{a}P \equiv S\boldsymbol{e}{\sim}P$,

НСФ8. $S\boldsymbol{i}P \equiv S\boldsymbol{i}{\sim}{\sim}P$,

НСФ9. $S\boldsymbol{i}S \vee {\sim}S\boldsymbol{i}{\sim}S$.

Единственным правилом **НСФ** является *modus ponens*.

Данное исчисление является расширением системы **СФ** (см. §1 Главы III), формализующей «фундаментальную» версию чистой позитивной силлогистики.

А.А. Ильин продемонстрировал погружаемость исчисления **НСФ** в классическое исчисление предикатов посредством следующей модификации стандартного «фундаментального» перевода *, приспособленного к особенностям языка чистой негативной силлогистики.

Предварительно задается синтаксическая функция, сопоставляющая каждой универсалии языка **НСФ** некоторую последовательность символов языка логики предикатов. В качестве знака этой функции используем символ подчеркивания.

$\underline{S} = S$ – для простых универсалий,

$\underline{\sim S} = \neg\underline{S}$ – для сложных универсалий.

Иными словами, если S есть произвольная универсалия вида ${\sim}{\sim}\ldots{\sim}Q$, образованная из простой универсалии Q n-кратным ($n \geq 0$) применением терминного отрицания, то $\underline{S}$ (т.е. $\underline{{\sim}{\sim}\ldots{\sim}Q}$) представляет собой последовательность символов $\neg\neg\ldots\neg Q$, содержащую n знаков пропозиционального отрицания.

С использованием данной синтаксической функции определяется модифицированный перевод * формул языка чистой негативной силлогистики на язык логики предикатов:

$SaP^* = \forall x(\underline{S}x \supset \underline{P}x)$, $SeP^* = \forall x(\underline{S}x \supset \neg\underline{P}x)$,

$SiP^* = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \underline{P}x)$, $SoP^* = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \neg\underline{P}x))$,

$(\neg\mathbf{A})^* = \neg(\mathbf{A}^*)$, $(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*$.

В ходе доказательства погружаемости **НСФ** в исчисление предикатов А.А. Ильин использует в качестве промежуточной систему **ОСФ** обобщенной фундаментальной силлогистики (см. § 2 Главы IV).

Предварительно демонстрируется погружаемость системы **НСФ** в силлогистику **ОСФ**.

Прежде, чем определить перевод λ_1, погружающий **НСФ** в **ОСФ**, задается функция f, ставящая в соответствие каждой универсалии языка чистой негативной фундаментальной силлогистики 0 или 1:

$f(S) = 0$, е.т.е. число терминных отрицаний в термине S четно или S не содержит терминных отрицаний;
$f(S) = 1$, е.т.е. число терминных отрицаний в термине S нечетно.

Пусть универсалия S имеет вид $\sim\sim\ldots\sim S_1$, универсалия P – вид $\sim\sim\ldots\sim P_1$, где S_1 и P_1 не содержат знаков терминного отрицания, а последовательности $\sim\sim\ldots\sim$ в составе S и P содержат произвольное число таких знаков (большее или равное нулю). Следующим образом задается перевод λ_1 с языка **НСФ** на язык **ОСФ**:

$$\lambda_1(SaP) = \begin{cases} S_1\mathbf{a}P_1, \text{ если } f(S) = 0 \text{ и } f(P) = 0; \\ S_1\mathbf{e}P_1, \text{ если } f(S) = 0 \text{ и } f(P) = 1; \\ S_1\mathbf{u}P_1, \text{ если } f(S) = 1 \text{ и } f(P) = 0; \\ P_1\mathbf{a}S_1, \text{ если } f(S) = 1 \text{ и } f(P) = 1. \end{cases}$$

$$\lambda_1(SiP) = \begin{cases} S_1\mathbf{i}P_1, \text{ если } f(S) = 0 \text{ и } f(P) = 0; \\ S_1\mathbf{o}P_1, \text{ если } f(S) = 0 \text{ и } f(P) = 1; \\ P_1\mathbf{o}S_1, \text{ если } f(S) = 1 \text{ и } f(P) = 0; \\ S_1\mathbf{j}P_1, \text{ если } f(S) = 1 \text{ и } f(P) = 1. \end{cases}$$

$$\lambda_1(SeP) = \begin{cases} S_1\mathbf{e}P_1, \text{ если } f(S) = 0 \text{ и } f(P) = 0; \\ S_1\mathbf{a}P_1, \text{ если } f(S) = 0 \text{ и } f(P) = 1; \\ P_1\mathbf{a}S_1, \text{ если } f(S) = 1 \text{ и } f(P) = 0; \\ S_1\mathbf{u}P_1, \text{ если } f(S) = 1 \text{ и } f(P) = 1. \end{cases}$$

$$\lambda_1(SoP) = \begin{cases} S_1\mathbf{o}P_1, \text{ если } f(S) = 0 \text{ и } f(P) = 0; \\ S_1\mathbf{i}P_1, \text{ если } f(S) = 0 \text{ и } f(P) = 1; \\ S_1\mathbf{j}P_1, \text{ если } f(S) = 1 \text{ и } f(P) = 0; \\ P_1\mathbf{o}S_1, \text{ если } f(S) = 1 \text{ и } f(P) = 1. \end{cases}$$

$\lambda_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\lambda_1(\mathbf{A})$,

$\lambda_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \lambda_1(\mathbf{A}) \nabla \lambda_1(\mathbf{B})$, где ∇ – бинарная связка.

Доказательство погружаемости **НСФ** в **ОСФ** посредством перевода λ_1 осуществляется с помощью критерия В.А. Смирнова, использовавшегося в метатеоретических доказательствах в предыдущих главах. Сначала демонстрируется, что λ_1-переводы всех теорем **НСФ** доказуемы в **ОСФ**. Затем задается обратный перевод λ_2 – перевод формул языка **ОСФ** на язык **НСФ**:

$\lambda_2(SaP) = SaP$, $\lambda_2(SuP) = \sim SaP$,

$\lambda_2(SiP) = SiP$, $\lambda_2(SjP) = \sim Si\sim P$,

$\lambda_2(SeP) = SeP$, $\lambda_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\lambda_2(\mathbf{A})$,

$\lambda_2(SoP) = SoP$, $\lambda_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \lambda_2(\mathbf{A}) \nabla \lambda_2(\mathbf{B})$.

Показывается, что λ_2-переводы всех теорем системы **ОСФ** являются также и теоремами **НСФ**.

Наконец, обосновывается доказуемость в системе **НСФ** формул вида $\mathbf{A} \equiv \lambda_2(\lambda_1(\mathbf{A})))$, где $\mathbf{A}$ – любая формула языка этой системы.

Из установленной А.А. Ильиным погружаемости исчисления **НСФ** в **ОСФ** и доказанной в §2 Главы IV погружаемости **ОСФ** в исчисление предикатов следует, что чистая негативная силлогистика **НСФ** погружается в классическое исчисление предикатов посредством определенной выше модификации перевода *, который точно выражает характерную для систем фундаментальной силлогистики семантику категорических высказываний.

§ 2. Другие системы чистой негативной силлогистики

Дадим краткий обзор современных формальных представлений других известных из истории логики чистых негативных силлогистик. Среди них силлогистики Б. Больцано, Л. Кэрролла, Аристотеля, а также тот вариант силлогистической теории подобного типа, который развивался в рамках традиционной логики. Указанные силлогистики базируются на иных – нежели фундаментальная – условиях истинности высказываний, о чем подробно говорилось в Главах I и III.

Негативная силлогистика Больцано

Формализация чистой негативной силлогистики, основанной на больцановской трактовке смыслов категорических высказываний, была осуществлена А.А. Ильиным [21]. Он построил аксиоматическое исчисление (назовем его **НСБ**), схемами аксиом которого являются:

НСБ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

НСБ1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$,
НСБ2. $SiP \supset PiS$,
НСБ3. $SiP \supset SaS$,
НСБ4. $SaP \supset SiP$,
НСБ5. $SeP \equiv (\neg SiP \,\&\, SiS)$,
НСБ6. $SoP \equiv (\neg SaP \,\&\, SiS)$,
НСБ7. $SiP \equiv Si{\sim}{\sim}P$,
НСБ8. $SaP \equiv Se{\sim}P$,
НСБ9. $SiS \vee {\sim}Si{\sim}S$.

Единственным правилом вывода в системе **НСБ** является правило *modus ponens*.

В данном исчислении доказуемы все теоремы системы **СБ**, формализующей позитивный силлогистический фрагмент логики Больцано (см. §2 Главы III). Среди постулатов **НСБ**, относящихся собственно к негативной силлогистике, – один из законов введения и удаления двойного терминного отрицания (**НСБ7**), закон превращения для общеутвердительных высказываний (**НСБ8**) и закон, утверждающий непустоту предметной области (**НСБ9**).

А.А. Ильин показал, что исчисление **НСБ** погружается в классическое исчисление предикатов посредством следующей модификации «больцановского» перевода $^{\circ}$:

$SaP^{\circ} = \forall x(\underline{S}x \supset \underline{P}x) \,\&\, \exists x\underline{S}x$,
$SeP^{\circ} = \forall x(\underline{S}x \supset \neg\underline{P}x) \,\&\, \exists x\underline{S}x$,
$SiP^{\circ} = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \underline{P}x)$,
$SoP^{\circ} = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \neg\underline{P}x)$,
$(\neg\mathbf{A})^{\circ} = \neg(\mathbf{A}^{\circ})$,
$(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^{\circ} = \mathbf{A}^{\circ} \nabla \mathbf{B}^{\circ}$

(определение синтаксической операции «подчеркивания» дано в предыдущем параграфе).

При доказательстве соответствующей метатеоремы роль промежуточной системы играет чистая негативная фундаментальная силлогистика **НСФ**.

Первоначально демонстрируется взаимная погружаемость **НСБ** и **НСФ**. Для этого области определения и области значений переводов ψ_1 и ψ_2 из §2 Главы III расширяются до множества формул языка чистой негативной силлогистики:

$\psi_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS$,
$\psi_1(SeP) = SeP \,\&\, SiS$,
$\psi_1(SiP) = SiP$,
$\psi_1(SoP) = SoP$,
$\psi_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_1(\mathbf{A})$,
$\psi_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \psi_1(\mathbf{A}) \nabla \psi_1(\mathbf{B})$.

$\psi_2(SaP) = SaP \vee \neg SiS$,
$\psi_2(SeP) = SeP \vee \neg SiS$,
$\psi_2(SiP) = SiP$,
$\psi_2(SoP) = SoP$,
$\psi_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_2(\mathbf{A})$,
$\psi_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \psi_2(\mathbf{A}) \nabla \psi_2(\mathbf{B})$.

Показывается, что перевод ψ_1 погружает **НСБ в НСФ**, а ψ_2 погружает **НСФ в НСБ**. Из этого утверждения, а также из результата о погружаемости системы **НСФ** в исчисление предикатов посредством перевода * (см. предыдущий параграф) вытекает, что система **НСБ** погружается в исчисление предикатов посредством композиции функций ψ_1 и *. Нетрудно убедиться в том, что эта композиция равносильна в исчислении предикатов заданной в данном параграфе модификации перевода $^{\circ}$, выражающего больцановскую семантику силлогистических утверждений.

Негативная силлогистика Кэрролла

Как известно, построенная Л. Кэрроллом теория выводов из категорических высказываний в своем оригинальном виде должна быть охарактеризована именно как чистая негативная силлогистика.

Позитивный фрагмент силлогистики Кэрролла – исчисление **СК** – был сформулирован ранее в §3 Главы III.

Попытки формальной реконструкции полной силлогистики Кэрролла на базе классического исчисления высказываний были предприняты Н.Г. Колесниковым [25], [26], [27], который предложил несколько аксиоматических систем, с разной степенью адекватности воспроизводящих класс законов кэрролловской логики.

А.А. Ильину [19] удалось построить систему чистой негативной силлогистики (назовем ее **НСК**), которая погружается в исчисление предикатов посредством перевода, выражающего кэрролловскую трактовку условий истинности и ложности категорических высказываний. В данной системе, как и у самого Кэрролла, не четыре, а лишь три исходные силлогистические константы: ***a***, ***e*** и ***i***. Кроме того, каждая универсалия содержит не более одного знака ~.

Постулатами **НСК** являются правило вывода *modus ponens* и аксиомы следующих типов:

НСК0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

НСК1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$,
НСК2. $SiP \supset PiS$,
НСК3. $SiP \supset SaS$,
НСК4. $SaP \supset SiP$,
НСК5. $SeP \equiv \neg SiP$,
НСК6. $SaP \equiv (Se{\sim}P \,\&\, SiS)$,
НСК7. $Sa{\sim}P \equiv (SeP \,\&\, SiS)$,
НСК8. $SiS \vee {\sim}Si{\sim}S$.

Данное исчисление, как показал А.А. Ильин, погружается в классическое исчисление предикатов посредством следующей модификации «кэрроловского» перевода $'$, заданного в §3 Главы III (оператор подчеркивания определен в первом параграфе настоящей главы):

$$SaP' = \forall x(\underline{S}x \supset \underline{P}x) \,\&\, \exists x\underline{S}x, \qquad SeP' = \forall x(\underline{S}x \supset \neg\underline{P}x),$$
$$SiP' = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \underline{P}x), \qquad (\neg\mathbf{A})' = \neg(\mathbf{A}'), \qquad (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \nabla \mathbf{B}'.$$

Соответствующая метатеорема доказывается с предварительной демонстрацией погружаемости **НСК** в **НСФ** и с опорой на результат о погружаемости **НСФ** в исчисление предикатов посредством модифицированного перевода * (см. §1 данной главы). Погружаемость **НСК** в **НСФ** обосновывается в соответствии с критерием В.А. Смирнова с использованием несколько модифицированных перевода η_1 из кэрролловской силлогистики в силлогистику фундаментальную и обратного перевода η_2, которые были определены в Главе III:

$$\eta_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS, \qquad \eta_1(SeP) = SeP,$$
$$\eta_1(SiP) = SiP, \qquad \eta_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\eta_1(\mathbf{A}),$$
$$\eta_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \eta_1(\mathbf{A}) \nabla \eta_1(\mathbf{B}).$$

$$\eta_2(SaP) = SaP \vee \neg SiS, \qquad \eta_2(SeP) = SeP,$$
$$\eta_2(SiP) = SiP, \qquad \eta_2(SoP) = \neg SaP \,\&\, SiS,$$
$$\eta_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\,\eta_2(\mathbf{A}), \qquad \eta_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \eta_2(\mathbf{A}) \nabla \eta_2(\mathbf{B}).$$

Модификация переводов η_1 и η_2 связана с отсутствием силлогистической константы *o* среди исходных констант языка **НСК**, а также с изменением их областей определения и значений на множества формул негативных силлогистик, в которых число знаков ~ и универсалиях не превышает 1.

Композиция функций η_1 и * равносильна в исчислении предикатов переводу ' (в том виде, как указанные функции определены в данной главе), следовательно, «кэрроловский» перевод ' погружает **НСК** в классическое исчисление предикатов. Данный результат свидетельствует о том, что исчисление **НСК** действительно является адекватной формализацией полной версии силлогистики Кэрролла.

Негативная силлогистика Аристотеля

Как уже отмечалось в Главе II, Аристотель не оставил после себя чистой негативной силлогистики как стройной дедуктивной системы. Однако некоторые фрагменты его текстов позволяют судить как о семантике высказываний с отрицательными терминами, так и о тех формах выводов из них, которые являются приемлемыми либо неприемлемыми с точки зрения Стагирита.

Ранее нами был обоснован тезис о том, что наиболее адекватной для формального представления аристотелевской логики системой чистой позитивной силлогистики является исчисление **С2**, предло-

женное В.А. Смирновым. Очевидно, что современная реконструкция идей Аристотеля, относящихся к силлогистике с отрицательными терминами, должна использовать именно **С2** в качестве основы. Такого рода система чистой негативной силлогистики (назовем ее **НС2**) была предложена А.А. Ильиным [20].

Схемами аксиом **НС2** являются:

НСА0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

НСА1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$,

НСА2. $SiP \supset PiS$,

НСА3. $SiP \supset SaS$,

НСА4. $SaP \supset SiP$,

НСА5. $SeP \equiv \neg SiP$,

НСА6. $SoP \equiv \neg SaP$,

НСА7. $SaP \equiv (Se{\sim}P \,\&\, SiS)$,

НСА8. $SiP \equiv Si{\sim}{\sim}P$,

НСА9. $SiS \vee {\sim}Si{\sim}S$.

Как и ранее, единственное правило вывода – *modus ponens*.

В исчислении **НС2** доказуемы все теоремы чистой позитивной силлогистики **С2**. Постулатами, выражающими свойства терминного отрицания, являются: один из законов превращения в аристотелевской редакции (**НСА7**), один из законов введения и снятия двойного терминного отрицания (**НСА8**) и закон непустоты предметной области (**НСА9**).

В системе **НС2** справедливы только такие законы превращения, на правомерность которых указывал сам Аристотель, а именно, законы превращения утвердительных высказываний в отрицательные:

$$SaP \supset Se{\sim}P, \qquad SiP \supset So{\sim}P.$$

Что же касается превращений отрицательных высказываний в утвердительные, то они правомерны лишь в том случае, когда их субъект S непуст (т.е. истинно утверждение SiS). Это хорошо согласуется с предразумевавшейся у Стагирита семантикой категорических высказываний, о которой подробно шла речь в Главе II. В системе **НС2** доказуемы аналоги именно таких законов превращения:

$$(SeP \,\&\, SiS) \supset Sa{\sim}P, \qquad (SoP \,\&\, SiS) \supset Si{\sim}P.$$

А.А. Ильин показал, что силлогистика **НС2** погружается в исчисление предикатов посредством следующей модификации функции ^, которая была задана в §4 Главы III для системы **С2** и выражает аристотелевскую трактовку условий истинности высказываний:

$$SaP\hat{} = \forall x(\underline{S}x \supset \underline{P}x) \,\&\, \exists x\underline{S}x, \qquad SeP\hat{} = \forall x(\underline{S}x \supset \neg\underline{P}x),$$
$$SiP\hat{} = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \underline{P}x), \qquad SoP\hat{} = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \neg\underline{P}x) \vee \neg\exists x\underline{S}x,$$
$$(\neg\mathbf{A})\hat{} = \neg(\mathbf{A}\hat{}), \qquad (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})\hat{} = \mathbf{A}\hat{} \nabla \mathbf{B}\hat{}.$$

Теорема о погружаемости системы **НС2** в исчисление предикатов посредством ^-перевода доказывается тем же методом, что и для чистых негативных силлогистик Больцано и Кэрролла. Сначала демонстрируется погружаемость **НС2** в фундаментальную силлогистику **НСФ** посредством перевода χ_1, сформулированного в Главе III и распространенного на множество формул чистой негативной силлогистики:

$$\chi_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS, \qquad \chi_1(SeP) = SeP,$$
$$\chi_1(SiP) = SiP, \qquad \chi_1(SoP) = SoP \vee \neg SiS,$$
$$\chi_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi_1(\mathbf{A}), \qquad \chi_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \chi_1(\mathbf{A}) \nabla \chi_1(\mathbf{B}).$$

В качестве обратного перевода из **НСФ** в **НС2** выбирается аналогичная модификация функции χ_2 из той же главы:

$$\chi_2(SaP) = SaP \vee \neg SiS, \qquad \chi_2(SeP) = SeP,$$
$$\chi_2(SiP) = SiP, \qquad \chi_2(SoP) = SoP \,\&\, SiS,$$
$$\chi_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi_2(\mathbf{A}), \qquad \chi_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \chi_2(\mathbf{A}) \nabla \chi_2(\mathbf{B}).$$

Далее используется утверждение о погружаемости **НСФ** в исчисление предикатов посредством функции * (см. § 1 настоящей главы), а также тот факт, что композиция функций χ_1 и * равносильна в исчислении предикатов «аристотелевскому» переводу ^.

Традиционная негативная силлогистика

Традиционную чистую позитивную силлогистику, как об этом говорилось выше, формализует система **С4**, которая дедуктивно эквивалентна силлогистике Я. Лукасевича. В Главе III было показано, что одна из адекватных трактовок **С4** заключается в принятии исходной предпосылки о непустоте всех универсалий в сочетании с «фундаментальным» пониманием смыслов категорических высказываний.

Что же касается чистого негативного варианта традиционной силлогистики, то в нем исходная экзистенциальная предпосылка несколько модифицируется в связи с введением в силлогистический язык отрицательных терминов: постулируется не только непустота, но и неуниверсальность общих терминов (универсалий). Эта идея может быть выражена посредством следующего перевода Θ' формул языка чистой негативной силлогистики на язык логики предикатов:

$$\Theta'(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \,\&\, \exists x \neg S_1 x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x S_n x \,\&\, \exists x \neg S_n x) \supset \mathbf{A}^*,$$

где **A** – произвольная формула силлогистического языка, $S_1,\ldots, S_n$ – список всех простых универсалий в составе **A**, а * – «фундаментальный» перевод, заданный в §1 данной главы.

Поскольку перевод Θ' точным образом соответствует семантическим основаниям традиционной версии чистой негативной силлогистики, адекватной формализацией указанной логической теории будет такое силлогистическое исчисление, которое погружается в исчисление предикатов посредством данного перевода. Подобную систему (назовем ее **НС4**) предложил А.А. Ильин [22] (детальное доказательство метатеоремы о погружаемости **НС4** в исчисление предикатов пока неопубликовано). Схемами аксиом данной системы являются:

НСТ0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

НСТ1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$,
НСТ2. $SiP \supset PiS$,
НСТ3. SaS,
НСТ4. $SaP \supset SiP$,
НСТ5. $SeP \equiv \neg SiP$,
НСТ6. $SoP \equiv \neg SaP$,
НСТ7. $SaP \equiv Se{\sim}P$,
НСТ8. $SiP \equiv Si{\sim}{\sim}P$.

Единственное правило вывода в системе **НС4** – *modus ponens*.

Попытки создания современного аналога традиционной чистой негативной силлогистики предпринимались и ранее – А. Ведбергом [94] и Дж. Шефердсоном [82]. Ими были построены дедуктивно эквивалентные друг другу аксиоматические системы логики классов с силлогистической константой *a* и оператором терминного отрицания ~. Эти системы характеризовались Шефердсоном как теории включения и дополнения для непустых и неуниверсальных классов.

Собственными аксиомами системы Шефердсона являются формулы следующих типов:

1. $Sa{\sim}{\sim}S$,
2. ${\sim}{\sim}SaS$,
3. $(SaM \,\&\, MaP) \supset SaP$,
4. $SaP \supset {\sim}Pa{\sim}S$,
5'. $\neg Sa{\sim}S$.

В рамках данного исчисления для получения полного варианта традиционной силлогистики могут быть естественным образом определены другие стандартные силлогистические константы:

$$SeP \equiv_{df} Sa{\sim}P, \qquad SiP \equiv_{df} \neg Sa{\sim}P, \qquad SoP \equiv_{df} \neg SaP.$$

Глава VII

СИНГУЛЯРНЫЕ ПОЗИТИВНЫЕ СИЛЛОГИСТИКИ

§ 1. Сингулярные позитивные силлогистики в аристотелевском языке

В данной главе рассматриваются такие теории вывода из категорических высказываний, в которых содержатся два типа нелогических терминов: универсалии – знаки множеств предметов, и сингулярные (единичные) термины – знаки отдельных предметов. Силлогистики, в языке которых явно различаются универсалии и сингулярные термины, называются, как уже говорилось в Главе I, *сингулярными*. Мы начнем с анализа таких сингулярных силлогистик, где игнорируется внутренняя структура терминов, не вводятся в язык особые терминообразующие операторы. Эти теории называют *сингулярными позитивными силлогистиками*.

Существует, по крайней мере, два способа введения сингулярных терминов в язык силлогистики. Первый из них был осуществлен Аристотелем, который в качестве примеров рассматривал силлогизмы с единичными высказываниями. Анализ этих примеров позволяет, как об этом говорилось во Главе II, установить следующее. Сингулярные термины употребляются Аристотелем только в качестве субъектов высказываний, но никогда в качестве предикатов. Он не использует сингулярные термины в общих и частных высказываниях – высказываниях типа ***a***, ***e***, ***i*** и ***o***. Иначе говоря, высказывания с сингулярными терминами представляют собой особые типы категорических высказываний *«v есть P»* и *«v не есть P»*, не сводимые к другим типам – общим и частным высказываниям.

Другая трактовка роли сингулярных терминов в силлогистическом языке была характерна для У. Оккама. В противоположность Аристотелю, Оккам использует сингулярные термины на местах как субъектов, так и предикатов высказываний. Причем единичные высказывания (высказывания с сингулярным субъектом) не рассматриваются им как высказывания особого типа, а представляют собой разновидность множественных (общих или частных) высказываний. При оккамовском подходе осмысленными оказываются высказывания вида «Всякий (некоторый) *v* есть (не есть) *P*». Таким образом, второй способ введения сингулярных терминов в язык позитивной силлогистики не требует использования новых, отличных от ***a***, ***e***, ***i***, ***o***, силлогистических констант, допуская употребле-

ние на аргументных местах как универсалий, так и сингулярных терминов.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые силлогистические теории, в которых предполагается, что сингулярные термины могут выступать только в качестве субъектов, а единичные высказывания представляют собой самостоятельные типы категорических высказываний. Язык такого рода сингулярных силлогистик можно условно назвать *аристотелевским*.

Нелогическими символами этого языка наряду с универсалиями (как и ранее, будем обозначать их в метаязыке буквами S, P, Q, M, …) являются сингулярные термины (в качестве метапеременных по последним будем использовать знаки v, w, v_1, w_1, v_2,...). Силлогистическими константами наряду со стандартными (***a***, ***e***, ***i***, ***o***) будут новые константы $\dot{a}$ (для единичноутвердительных высказываний) и $\dot{e}$ (для единичноотрицательных высказываний). В алфавите содержатся также пропозициональные связки и скобки.

Определение формулы задается так:

1. Если S и P – универсалии, то выражения типов SaP, SiP, SeP, SoP являются формулами;
2. Если S – универсалия, а v – сингулярный термин, то выражения типов $v\dot{a}S$ (читается: «v есть S») и $v\dot{e}S$ (читается: «v не есть S») суть формулы;
3. Если **A** и **B** – формулы, то $\neg$**A**, (**A** & **B**), (**A** $\vee$ **B**), (**A** $\supset$ **B**), (**A** $\equiv$ **B**) – формулы;
4. Ничто иное не есть формула.

Система **СФ**$^{C}_{A}$

В описанном языке можно построить целый спектр теорий, различающихся пониманием смыслов категорических высказываний. Сформулируем сначала сингулярный позитивный вариант фундаментальной силлогистики. Для этого расширим область определения введенной в §1 Главы III функции *, включив в нее дополнительно единичные высказывания аристотелевского языка:

$$v\dot{a}S^* = Sv, \qquad v\dot{e}S^* = \neg Sv.$$

Назовем *фундаментальной сингулярной позитивной силлогистикой в аристотелевском языке* теорию, законами которой являются те и только те силлогистические формулы, *-переводы которых являются теоремами исчисления предикатов. Одной из возможных ее аксиоматизаций является исчисление **СФ**^C_A, предложенное В.И. Маркиным в [36]. Схемами аксиом **СФ**^C_A являются:

$\mathbf{A}^C_A\mathbf{0}$. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,
$\mathbf{A}^C_A\mathbf{1}$. $(SaP \,\&\, v\bar{a}S) \supset v\bar{a}P$,
$\mathbf{A}^C_A\mathbf{2}$. $(v\bar{a}P \,\&\, v\bar{a}S) \supset SiP$,
$\mathbf{A}^C_A\mathbf{3}$. $SeP \equiv \neg SiP$,
$\mathbf{A}^C_A\mathbf{4}$. $SoP \equiv \neg SaP$,
$\mathbf{A}^C_A\mathbf{5}$. $v\bar{e}S \equiv \neg v\bar{a}S$.

Правилами вывода этой системы являются:

R1. *modus ponens*,

$$\mathbf{R2}.\ \frac{\vdash (v\bar{a}S \,\&\, v\bar{a}P) \supset \mathbf{A}}{\vdash SiP \supset \mathbf{A},} \qquad \mathbf{R3}.\ \frac{\vdash (v\bar{a}S \,\&\, v\bar{e}P) \supset \mathbf{A}}{\vdash SoP \supset \mathbf{A},}$$

где сингулярный термин v не содержится в **A**.

Правила **R2** и **R3** представляют собой вариант реконструкции метода эктетического рассуждения в сингулярной силлогистике. Понятие доказательства стандартное.

Сформулированная система является расширением исчисления **СФ**, аксиоматизирующего чистую позитивную фундаментальную силлогистику. В этом нетрудно убедиться, построив доказательства в **СФ**^C_A аксиомных схем силлогистики **СФ**.

СФ1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$

1.	$(MaP \,\&\, v\bar{a}M) \supset v\bar{a}P$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{1}$
2.	$(SaM \,\&\, v\bar{a}S) \supset v\bar{a}M$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{1}$
3.	$(MaP \,\&\, SaM \,\&\, v\bar{a}S) \supset v\bar{a}P$	1, 2; ЛВ
4.	$v\bar{e}P \equiv \neg v\bar{a}P$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{5}$
5.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{e}P) \supset \neg(MaP \,\&\, SaM)$	3, 4; ЛВ
6.	$SoP \supset \neg(MaP \,\&\, SaM)$	5; **R3**
7.	$SoP \equiv \neg SaP$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{4}$
8.	$(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$	6, 7; ЛВ

СФ2. $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$

1.	$(SaM \,\&\, v\bar{a}S) \supset v\bar{a}M$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{1}$
2.	$v\bar{e}M \equiv \neg v\bar{a}M$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{5}$
3.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{e}M) \supset \neg SaM$	1, 2; ЛВ
4.	$(v\bar{a}P \,\&\, v\bar{a}M) \supset MiP$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{2}$
5.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{a}P) \supset (MiP \vee \neg SaM)$	2, 3, 4; ЛВ
6.	$SiP \supset (MiP \vee \neg SaM)$	5; **R2**
7.	$SeP \equiv \neg SiP$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{3}$
8.	$MeP \equiv \neg MiP$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{3}$
9.	$(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$	6, 7, 8; ЛВ

СФ3. $SeP \supset PeS$

1.	$(v\bar{a}P \,\&\, v\bar{a}S) \supset SiP$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{2}$
2.	$PiS \supset SiP$	1; **R2**
3.	$SeP \equiv \neg SiP$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{3}$
4.	$PeS \equiv \neg PiS$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{3}$
5.	$SeP \supset PeS$	2, 3, 4; ЛВ

СФ4. SaS

1.	$v\bar{e}S \equiv \neg v\bar{a}S$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{5}$
2.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{e}S) \supset SaS$	1; ЛВ
3.	$SoS \supset SaS$	2; **R3**
4.	$SoS \equiv \neg SaS$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{4}$
5.	SaS	3, 4; ЛВ

СФ5. $SiP \supset SiS$

1.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{a}S) \supset SiS$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{2}$
2.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{a}P) \supset SiS$	1; ЛВ
3.	$SiP \supset SiS$	2; **R2**

СФ6. $SoP \supset SiS$

1.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{a}S) \supset SiS$	$\mathbf{A}^C_A\mathbf{2}$
2.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{e}P) \supset SiS$	1; ЛВ
3.	$SoP \supset SiS$	2; ЛВ

Схемы аксиом **СФ7** и **СФ8** системы **СФ** совпадают, соответственно, со схемами аксиом $\mathbf{A}^C_A\mathbf{3}$ и $\mathbf{A}^C_A\mathbf{4}$.

Построим семантику исчисления **СФ**^C_A. *Моделью* является пара $\langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$, где $\mathbf{D} \neq \varnothing$, φ приписывает значения сингулярным терминам и универсалиям следующим образом: $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$. Условия истинности элементарных формул в модели $\langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$ таковы:

И1. $|SaP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \subseteq \varphi(P)$,
И2. $|SiP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing$,
И3. $|SeP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) = \varnothing$,
И4. $|SoP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(S) \setminus \varphi(P) \neq \varnothing$,
И5. $|v\bar{a}S|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(v) \in \varphi(S)$,
И6. $|v\bar{e}S|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(v) \notin \varphi(S)$.

Условия истинности для сложных формул, понятие истинности в модели и $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-общезначимости стандартные.

Докажем метатеорему о непротиворечивости исчисления $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$ относительно предложенной семантики.

Метатеорема 1.

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A} \vdash \mathbf{A} \supset \mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A} \vDash \mathbf{A}).$$

Легко показать, что все аксиомы системы являются $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-общезначимыми формулами, а правило *modus ponens* сохраняет общезначимость. Покажем, что правило **R2** также инвариантно относительно $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-общезначимости.

Пусть $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A} \vDash (vaS \,\&\, vaP) \supset \mathbf{A}$, а формула $SiP \supset \mathbf{A}$ – необщезначима. Тогда существует модель $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$, такая что $|SiP \supset \mathbf{A}|^{\mathbf{D}}_\varphi = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что $|\mathbf{A}|^{\mathbf{D}}_\varphi = \mathbf{0}$, а $|SiP|^{\mathbf{D}}_\varphi = \mathbf{1}$, т.е. $\varphi(S) \cap \varphi(P) \neq \varnothing$. Построим модель $\langle\mathbf{D}', \varphi'\rangle$ следующим образом: $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$, а φ' отличается от φ разве что приписыванием для сингулярного термина v. При этом пусть $\varphi'(v)$ будет элементом $\varphi(S) \cap \varphi(P)$. Ясно, что $|vaS \,\&\, vaP|^{\mathbf{D}'}_{\varphi'} = \mathbf{1}$. Поскольку v не содержится в $\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|^{\mathbf{D}'}_{\varphi'} = |\mathbf{A}|^{\mathbf{D}}_\varphi = \mathbf{0}$. Следовательно, $|(vaS \,\&\, vaP) \supset \mathbf{A}|^{\mathbf{D}'}_{\varphi'} = \mathbf{0}$, что противоречит предположению об общезначимости этой формулы. Поэтому $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A} \vDash SiP \supset \mathbf{A}$.

Инвариантность правила **R3** относительно $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-общезначимости доказывается аналогично. **Метатеорема 1** *доказана*.

Обратное утверждение доказывается методом Хенкина. Понятия $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-непротиворечивого и $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-максимального множеств задаются аналогично соответствующим понятиям системы **СФ** (§1 Главы III). Назовем $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-максимальное непротиворечивое множество формул $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-насыщенным, е.т.е. выполняются два условия:

(i) $\dot\forall S \dot\forall P(SiP \in \blacktriangle \,\dot\supset\, \dot\exists v(vaS \,\&\, vaP \in \blacktriangle))$.

(ii) $\dot\forall S \dot\forall P(SoP \in \blacktriangle \,\dot\supset\, \dot\exists v(vaS \,\&\, veP \in \blacktriangle))$.

Лемма 1.

Пусть $\mathbf{T}$ *– множество сингулярных терминов языка, а* $\mathbf{T}_\Gamma$ *– множество сингулярных терминов, содержащихся в формулах из* Γ. *Произвольное* $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$*-непротиворечивое множество формул* Γ *такое, что* $\mathbf{T} \setminus \mathbf{T}_\Gamma$ *бесконечно, можно расширить до* $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$*-насыщенного множества* $\blacktriangle$.

Опишем процедуру насыщения Γ до $\blacktriangle$. Пусть $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots$ – пересчет всех формул языка. Строим последовательность множеств $\blacktriangle_0, \blacktriangle_1, \ldots$ следующим образом. $\blacktriangle_1 = \Gamma$, $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n$ если $\blacktriangle_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-противоречиво. Если же $\blacktriangle_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ непротиворечиво, то имеется три возможности: 1) если $\mathbf{C}_n = SiP$, то $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n \cup \{SiP, vaS \,\&\, vaP\}$, где v не входит в формулы из $\blacktriangle_n$; 2) если $\mathbf{C}_n = SoP$, то $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n \cup \{SoP, vaS \,\&\, veP\}$, где v не входит в $\blacktriangle_n$; 3) если $\mathbf{C}_n$ имеет какой-либо другой вид, то $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$.

Пусть далее $\blacktriangle = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n$.

Покажем, что каждое $\blacktriangle_i$ (а значит и $\blacktriangle$) является $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-непротиворечивым множеством. $\blacktriangle_0 = \Gamma$ непротиворечиво по условию леммы. Пусть $\blacktriangle_n$ непротиворечиво, тогда непротиворечивость $\blacktriangle_{n+1}$ очевидна, кроме случаев 1) и 2). Рассмотрим случай, когда $\mathbf{C}_n = SiP$. Предположим, что $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n \cup \{SiP, vaS \,\&\, vaP\}$ противоречиво. Тогда в $\blacktriangle_n$ найдутся формулы $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$, такие что $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A} \vdash \neg(\mathbf{A}_1 \,\&\ldots\&\, \mathbf{A}_m \,\&\, SiP \,\&\, vaS \,\&\, vaP)$. Отсюда следует, что $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A} \vdash (vaS \,\&\, vaP) \supset \neg(\mathbf{A}_1 \,\&\ldots\&\, \mathbf{A}_m \,\&\, SiP)$. В силу **R2** имеем: $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A} \vdash SiP \supset \neg(\mathbf{A}_1 \,\&\ldots\&\, \mathbf{A}_m \,\&\, SiP)$, т.е. $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A} \vdash \neg(\mathbf{A}_1 \,\&\ldots\&\, \mathbf{A}_m \,\&\, SiP)$, что противоречит условию непротиворечивости множества $\blacktriangle_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$. Ход рассуждений в случае, когда $\mathbf{C}_n = SoP$, аналогичен.

Так же, как и для системы **СФ**, показывается, что $\blacktriangle$ является максимальным множеством. Анализ процедуры расширения Γ до $\blacktriangle$ позволяет утверждать, что $\blacktriangle$ удовлетворяет условиям (i) и (ii), т.е. является $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$-насыщенным множеством. **Лемма 1** *доказана*.

Каноническая модель $\langle\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle\rangle$ задается таким образом: $\mathbf{D}_\blacktriangle$ – множество сингулярных терминов языка, $\varphi_\blacktriangle(v) = v$, $\varphi_\blacktriangle(S) = \{w : waS \in \blacktriangle\}$.

Лемма 2.

Для произвольного $\mathbf{С\Phi}^C{}_\text{A}$*-насыщенного множества* $\blacktriangle$ *и произвольной формулы* $\mathbf{A}$ *верно*: $|\mathbf{A}| = \mathbf{1}$ *в* $\langle\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle\rangle$, *е.т.е.* $\mathbf{A} \in \blacktriangle$.

Лемма доказывается индукцией по числу пропозициональных связок в формуле $\mathbf{A}$. При обосновании базиса достаточно рассмотреть случаи, когда $\mathbf{A}$ имеет вид SaP, SiP и vaS.

I. $\mathbf{A} = SaP$.

Докажем сначала, что $|SaP|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1} \,\dot\supset\, SaP \in \blacktriangle$.

1.	$\lvert SaP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$SaP \notin \blacktriangle$	допущение
3.	$SoP \equiv \neg SaP \in \blacktriangle$	$\mathrm{A}^C{}_\text{A}4$, св-во (а) максимального мн-ва
4.	$SoP \in \blacktriangle$	2, 3; (ж), (б), (в)
5.	$\exists v(vaS \,\&\, veP \in \Delta)$	4; условие (ii)

6.	$v\bar{e}P \equiv \neg v\bar{a}P \in \Delta$	$\mathbf{A}^C{}_A$**5**, (а)
7.	$\dot{\exists} v(v\bar{a}S \in \Delta \ \dot{\&} \ v\bar{a}P \notin \blacktriangle)$	5, 6; (г), (ж), (б), (в)
8.	$\varphi_\blacktriangle(S) \setminus \varphi_\blacktriangle(P) \neq \varnothing$	7; опред. $\varphi_\blacktriangle$
9.	$\lvert SaP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{0}$	8; **И1**
10.	$SaP \in \blacktriangle$	1, 9; от противного

Докажем обратное утверждение.

1.	$SaP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$v\bar{a}S \in \blacktriangle$	допущение
3.	$(SaP \ \& \ v\bar{a}S) \supset v\bar{a}P \in \blacktriangle$	$\mathbf{A}^C{}_A$**1**, (а)
4.	$v\bar{a}P \in \blacktriangle$	1, 2, 3; (г), (б)
5.	$\dot{\forall} w(w\bar{a}S \in \blacktriangle \mathbin{\dot{\supset}} w\bar{a}P \in \blacktriangle)$	2–4; $\dot{\supset}_{в}$, $\dot{\forall}_{в}$
6.	$\varphi_\blacktriangle(S) \subseteq \varphi_\blacktriangle(P)$	5; опред. $\varphi_\blacktriangle$
7.	$\lvert SaP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	6; **И1**

II. $\mathbf{A} = SiP$.

Докажем сначала, что $\lvert SiP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1} \ \dot{\supset} \ SiP \in \blacktriangle$.

1.	$\lvert SiP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\dot{\exists} v(v\bar{a}P \ \& \ v\bar{a}S \in \blacktriangle)$	1; **И2**, опред. $\varphi_\blacktriangle$, (г)
3.	$(v\bar{a}P \ \& \ v\bar{a}S) \supset SiP \in \blacktriangle$	$\mathbf{A}^C{}_A$**2**, (а)
4.	$SiP \in \blacktriangle$	2, 3; $\dot{\exists}_{и}$, (б)

Докажем обратное утверждение.

1.	$SiP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$\dot{\exists} v(v\bar{a}S \ \& \ v\bar{a}P \in \Delta)$	1, условие (i)
3.	$\varphi_\blacktriangle(S) \cap \varphi_\blacktriangle(P) \neq \varnothing$	2; (г), опред. $\varphi_\blacktriangle$
4.	$\lvert SiP\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	3; **И2**

III. $\mathbf{A} = v\bar{a}S$.

$\lvert v\bar{a}S\rvert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi_\blacktriangle(v) \in \varphi_\blacktriangle(S)$ (в силу **И5**), е.т.е. $v \in \{w: w\bar{a}S \in \blacktriangle\}$ (в силу определения $\varphi_\blacktriangle$), е.т.е. $v\bar{a}S \in \blacktriangle$.

Индуктивный переход доказывается так же, как и для системы **СФ**. **Лемма 2** *доказана*.

Из **Лемм 1** и **2** следует утверждение о полноте системы $\mathbf{СФ}^C{}_A$ относительно данной семантики:

Метатеорема 2.

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{СФ}^C{}_A \vDash \mathbf{A} \ \dot{\supset} \ \mathbf{СФ}^C{}_A \vdash \mathbf{A}).$$

Таким образом, мы показали, что класс теорем исчисления $\mathbf{СФ}^C{}_A$ совпадает с классом $\mathbf{СФ}^C{}_A$-общезначимых формул.

В §1 Главы III отмечалось, что пара <**D**, φ> является стандартной моделью для оценки формул классического исчисления предикатов. Если в его языке содержатся индивидные константы, то значения им в <**D**, φ> приписывается посредством функции φ: $\varphi(v) \in \mathbf{D}$. Поскольку элементарные формулы типа Sv не содержат свободных переменных, то условия их истинности в <**D**, φ> определяются следующим образом:

$$\lvert Sv\rvert_\varphi = \mathbf{1}, \text{ е.т.е. } \varphi(v) \in \varphi(S).$$

Ранее относительно формул языка чистой позитивной силлогистики и **СФ**-семантики была доказана **Лемма 3**, утверждающая, что для любой силлогистической формулы **A** и любой модели <**D**, φ> формула **A** истинна в <**D**, φ>, е.т.е. ее перевод на язык логики предикатов **A*** истинен в <**D**, φ>. Нетрудно убедиться в том, что данное утверждение справедливо также для формул новых типов – $v\bar{a}S$ и $v\bar{e}S$ – аристотелевского варианта языка сингулярной позитивной силлогистики и $\mathbf{СФ}^C{}_A$-семантики. Из **Леммы 3** непосредственно выводимо

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{СФ}^C{}_A \vDash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{ЛП} \vDash \mathbf{A}^*).$$

Из данного утверждения, **Метатеорем 1** и **2**, а также из факта семантической непротиворечивости и полноты исчисления предикатов следует:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{СФ}^C{}_A \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{ИП} \vdash \mathbf{A}^*).$$

Таким образом, доказана погружаемость $\mathbf{СФ}^C{}_A$ в исчисление предикатов посредством функции *. Следовательно, данная система является адекватной формализацией фундаментальной сингулярной позитивной силлогистики в аристотелевском языке.

Система $\mathbf{C2}^C{}_A$

В аристотелевском языке можно построить другие силлогистические теории, основанные на иных трактовках смыслов категорических высказываний. Наиболее естественный путь построения таких теорий заключается в расширении различных систем чистой позитивной силлогистики. Прежде всего рассмотрим сингулярную позитивную силлогистику на основе исчисления **С2**, построенную В.И. Маркиным [36]. Выбор этой системы обусловлен тем, что в ней формализуется аристотелевская интерпретация категорических высказываний. Этот факт, а также то, что система строится в сингулярном силлогистическом языке, учитывающем аристотелевские требования, дает возможность утверждать, что искомое расширение **C2** является *сингулярным позитивным фрагментом силлогистики Аристотеля*.

Напомним, что адекватная системе **C2** интерпретация категорических высказываний задается посредством оккамовского перевода ^ на язык логики предикатов (см. §4 Главы III). Для формул vaS и veS зададим тот же перевод, который использовался и в фундаментальной силлогистике.

Сформулируем систему $\mathbf{C2}^{C}_{A}$, которая аксиоматизирует сингулярный позитивный фрагмент силлогистики Аристотеля, т.е. погружается в исчисление предикатов посредством данного обобщения оккамовского перевода ^. Исчисление $\mathbf{C2}^{C}_{A}$ получается из **СФ**$^{C}_{A}$ присоединением новой схемы аксиом

$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{6}$. $SaP \supset SiS$,

а также заменой правила **R3** на новое правило

$$\mathbf{R3'}\quad \frac{\vdash (vaS \ \&\ veP) \supset \mathbf{A}}{\vdash (SoP \ \&\ SiS) \supset \mathbf{A},}$$

где v не содержится в **A**.

Покажем, что $\mathbf{C2}^{C}_{A}$ является сингулярным расширением системы **C2** чистой позитивной силлогистики. С этой целью построим доказательства всех аксиом **C2** в системе $\mathbf{C2}^{C}_{A}$.

Аксиомы **A6** и **A7** являются также аксиомами $\mathbf{C2}^{C}_{A}$. Доказательства аксиом **A2** и **A3** осуществляются в $\mathbf{C2}^{C}_{A}$ точно так же, как и в **СФ**$^{C}_{A}$.

A1. $(MaP \ \&\ SaM) \supset SaP$

1.	$(MaP \ \&\ vaM) \supset vaP$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{1}$
2.	$(SaM \ \&\ vaS) \supset vaM$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{1}$
3.	$(MaP \ \&\ SaM \ \&\ vaS) \supset vaP$	1, 2; **ЛВ**
4.	$veP \equiv \neg vaP$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{5}$
5.	$(vaS \ \&\ veP) \supset \neg(MaP \ \&\ SaM)$	3, 4; **ЛВ**
6.	$(SoP \ \&\ SiS) \supset \neg(MaP \ \&\ SaM)$	5; **R3'**
7.	$(MaP \ \&\ SaM) \supset (\neg SoP \vee \neg SiS)$	6; **ЛВ**
8.	$SaM \supset SiS$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{6}$
9.	$(MaP \ \&\ SaM) \supset \neg SoP$	7, 8; **ЛВ**
10.	$SoP \equiv \neg SaP$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{4}$
11.	$(MaP \ \&\ SaM) \supset SaP$	9, 10; **ЛВ**

A4. $SaP \supset SiP$

1.	$(SaP \ \&\ vaS) \supset vaP$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{1}$
2.	$(vaP \ \&\ vaS) \supset SiP$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{2}$
3.	$(SaP \ \&\ vaS) \supset SiP$	1, 2; **ЛВ**
4.	$(vaS \ \&\ vaS) \supset (SaP \supset SiP)$	3; **ЛВ**
5.	$SiS \supset (SaP \supset SiP)$	4; **R2**
6.	$SaP \supset SiS$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{6}$
7.	$SaP \supset SiP$	5, 6; **ЛВ**

A5. $SiP \supset SaS$

1.	$(vaS \ \&\ vaS) \supset SiS$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{2}$
2.	$(vaS \ \&\ vaP) \supset SiS$	1; **ЛВ**
3.	$SiP \supset SiS$	2; **R2**
4.	$veS \equiv \neg vaS$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{5}$
5.	$(vaS \ \&\ veS) \supset SaS$	4; **ЛВ**
6.	$(SoS \ \&\ SiS) \supset SaS$	5; **R3'**
7.	$SoS \equiv \neg SaS$	$\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{4}$
8.	$SiS \supset SaS$	6, 7; **ЛВ**
9.	$SiP \supset SaS$	3, 8; **ЛВ**

Доказательство погружаемости $\mathbf{C2}^{C}_{A}$ в исчисление предикатов осуществляется методом, использованным в Главе III для системы **C2**.

Зададим сначала перевод χ_1 из $\mathbf{C2}^{C}_{A}$ в **СФ**$^{C}_{A}$ с тем расчетом, чтобы его композиция с функцией * была равносильна вышеуказанному обобщенному оккамовскому переводу ^. Для этого достаточно к пунктам определения функции χ_1 §4 Главы III добавить два новых пункта:

$$\chi_1(vaS) = vaS \qquad \text{и} \qquad \chi_1(veS) = veS.$$

Докажем теперь теорему о погружаемости $\mathbf{C2}^{C}_{A}$ в **СФ**$^{C}_{A}$ посредством функции χ_1:

Метатеорема 3.

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{C2}^{C}_{A} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{СФ}^{C}_{A} \vdash \chi_1(\mathbf{A})).$$

Используем критерий погружаемости В.А. Смирнова. Сначала покажем, что χ_1-переводы всех теорем $\mathbf{C2}^{C}_{A}$ доказуемы в **СФ**$^{C}_{A}$.

Действительно, χ_1-переводы аксиом $\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{2}$, $\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{3}$, $\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{5}$, являются аксиомами **СФ**$^{C}_{A}$. Переводы аксиом $\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{1}$ ($(SaP \ \&\ SiS \ \&\ vaS) \supset vaP$) и $\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{4}$ ($(SoP \vee \neg SiS) \equiv \neg(SaP \ \&\ SiS)$) выводимы в **СФ**$^{C}_{A}$ из аксиом $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{1}$ и $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{4}$ по законам логики высказываний. Перевод аксиомной схемы $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{6}$ $((SaP \,\&\, SiS) \supset SiS)$ – тавтология логики высказываний. Тривиально доказывается, что $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_1((vaS \,\&\, veP) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_1(SiP \supset \mathbf{A})$, а также инвариантность доказуемости χ_1-переводов относительно *modus ponens*. Остается показать, что $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_1((vaS \,\&\, veP) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_1((SoP \,\&\, SiS) \supset \mathbf{A})$, где v не содержится в $\mathbf{A}$, а значит, и в $\chi_1(\mathbf{A})$.

1.	$\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_1((vaS \,\&\, veP) \supset \mathbf{A})$	допущение
2.	$\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash (vaS \,\&\, veP) \supset \chi_1(\mathbf{A})$	1; опред. χ_1
3.	$\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash SoP \supset \chi_1(\mathbf{A})$	2; **R3**
4.	$\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash ((SoP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS) \supset SoP$	тавтология **ЛВ**
5.	$\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_1((SoP \,\&\, SiS) \supset \mathbf{A})$	4, 3; **ЛВ**, опред. χ_1

Во второй части доказательства расширяем обратный перевод χ_2 из $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda}$ в $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda}$ на случай единичных высказываний так:

$$\chi_2(vaS) = vaS \qquad \text{и} \qquad \chi_2(veS) = veS.$$

Покажем, что χ_2-переводы всех теорем $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda}$ доказуемы в $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda}$.

$\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{1}$. $\chi_2((SaP \,\&\, vaS) \supset vaP) = ((SaP \vee \neg SiS) \,\&\, vaS) \supset vaP)$

1.	$(SaP \,\&\, vaS) \supset vaP$	$\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{1}$
2.	$(vaS \,\&\, vaS) \supset SiS$	$\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{2}$
3.	$((SaP \vee \neg SiS) \,\&\, vaS) \supset vaP$	1, 2; **ЛВ**

χ_2-переводы аксиом $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{2}$, $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{3}$, $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{5}$ системы $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda}$ являются аксиомами $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda}$. χ_2-перевод аксиомы $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{4}$ $((SoP \,\&\, SiS) \equiv \neg(SaP \vee \neg SiS))$ получается из аксиомы $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{4}$ по законам логики высказываний. Очевидно, что $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_2((vaS \,\&\, vaP) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{С2}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_2(SiP \supset \mathbf{A})$. Остается показать: $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_2((vaS \,\&\, veP) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{С2}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_2(SoP \supset \mathbf{A})$, где v не содержится в $\mathbf{A}$, а значит, и в $\chi_2(\mathbf{A})$.

1.	$\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_2((vaS \,\&\, veP) \supset \mathbf{A})$	допущение
2.	$\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda} \vdash (vaS \,\&\, veP) \supset \chi_2(\mathbf{A})$	1, опред. χ_2
3.	$\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda} \vdash (SoP \,\&\, SiS) \supset \chi_2(\mathbf{A})$	2, **R3**
4.	$\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda} \vdash \chi_2(SoP \supset \mathbf{A})$	3, опред. χ_2

В заключение для произвольной формулы $\mathbf{A}$ покажем, что в $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda}$ доказуема формула $\mathbf{A} \equiv \chi_2(\chi_1(\mathbf{A}))$. Доказательство ведется индукцией по числу пропозициональных связок в $\mathbf{A}$. Базис индукции сводится, в силу аксиомных схем $\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{3}$–$\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{5}$ системы $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda}$ и определений переводов χ_1 и χ_2, к трем случаям: 1) $\mathbf{A} = SaP$, 2) $\mathbf{A} = SiP$, 3) $\mathbf{A} = vaS$. В случаях 2) и 3) имеем: $\chi_2(\chi_1(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$. Если же $\mathbf{A} = SaP$, то $\chi_2(\chi_1(\mathbf{A})) = \chi_2(SaP \,\&\, SiS) = (SaP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS$.

1.	$((SaP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS) \supset SaP$	тавтология **ЛВ**
2.	$SaP \supset SiS$	$\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{6}$
3.	$SaP \supset ((SaP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS)$	2; **ЛВ**
4.	$SaP \equiv ((SaP \vee \neg SiS) \,\&\, SiS)$	1, 3; **ЛВ**

Индукционный переход обосновывается тривиально. **Метатеорема 3** *доказана*.

Таким образом, доказана погружаемость системы $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda}$ в $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda}$ посредством операции χ_1. Ранее было установлено, что $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda}$ погружается в исчисление предикатов посредством функции *. Учитывая, что композиция χ_1 и * равносильна указанному выше обобщению оккамовского перевода ^, можно считать обоснованным следующее утверждение:

Метатеорема 4.
$\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda}$ *погружается в* **ИП** *посредством обобщенного оккамовского перевода*.

Итак, мы обосновали утверждение о том, что система $\mathbf{С2}^{C}_{\Lambda}$ является формализацией на базе исчисления высказываний сингулярного позитивного фрагмента силлогистики Аристотеля.

Система $\mathbf{С4}^{C}_{\Lambda}$

Завершая рассмотрение систем сингулярной позитивной силлогистики в аристотелевском языке, построим соответствующее расширение исчисления **С4**, формализующего чистый позитивный фрагмент традиционной силлогистики.

Система $\mathbf{С4}^{C}_{\Lambda}$ получается из $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda}$ добавлением аксиом следующего типа:

$\mathbf{A}^{C}_{\Lambda}\mathbf{7}$. SiS.

Нетрудно показать, что в данной системе доказуемы все теоремы **С4**. Аксиомы **А6**, **А7**, и **А10** исчисления **С4** являются также аксиомами $\mathbf{С4}^{C}_{\Lambda}$. Доказательства в $\mathbf{С4}^{C}_{\Lambda}$ аксиом **А1**, **А2** и **А3** совпадают с их доказательствами в системе $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda}$. Аксиома **А5** $(SiP \supset SaS)$ получается по законам логики высказываний из SaS – теоремы $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\Lambda}$, а значит и $\mathbf{С4}^{C}_{\Lambda}$. Остается продемонстрировать доказуемость в $\mathbf{С4}^{C}_{\Lambda}$ аксиомы **А4** системы **С4**.

A4. $SaP \supset SiP$.

1.	$(SaP \ \&\ vaS) \supset vaP$	$\mathbf{A}^C{}_A\mathbf{1}$
2.	$(vaP \ \&\ vaS) \supset SiP$	$\mathbf{A}^C{}_A\mathbf{2}$
3.	$(vaS \ \&\ vaS) \supset (SaP \supset SiP)$	1, 2; **ЛВ**
4.	$SiS \supset (SaP \supset SiP)$	3; **R2**
5.	SiS	$\mathbf{A}^C{}_A\mathbf{7}$
6.	$SaP \supset SiP$	4, 5; **ЛВ**

Далее необходимо, во-первых, подходящим образом распространить на класс формул данного языка какой-либо перевод, погружающий **C4** в исчисление предикатов, и во-вторых, доказать погружаемость системы $\mathbf{C4}^C{}_A$ в **ИП** посредством этого обобщенного перевода.

Рассмотрим в этой связи перевод Θ Главы III, указывающий на то, что любое силлогистическое утверждение в **C4** содержит пресуппозицию о непустоте всех входящих в него терминов:

$$\Theta(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \ \&\ \ldots\ \&\ \exists x S_n x) \supset \mathbf{A}^*.$$

При доопределении перевода Θ в языке, содержащем сингулярные термины, нет никакой необходимости эксплицитно выражать пресуппозицию о непустоте терминов этого рода, поскольку утверждение о непустоте всех сингулярных терминов – один из исходных постулатов классического исчисления предикатов.

Таким образом, обобщение Θ в нашем языке выражается следующим образом: **A** – произвольная формула сингулярной традиционной позитивной силлогистики в аристотелевском языке, функция * – доопределенный в нем фундаментальный перевод в язык **ИП**, $S_1,\ldots, S_n$ – список всех универсалий в составе **A**.

Перед обоснованием тезиса о погружаемости $\mathbf{C4}^C{}_A$ в **ИП** посредством Θ докажем, что эта система погружается в фундаментальную сингулярную позитивную силлогистику $\mathbf{С\Phi}^C{}_A$ посредством следующей операции:

$$\omega_1(\mathbf{A}) = (S_1iS_1 \ \&\ \ldots\ \&\ S_niS_n) \supset \mathbf{A},$$

где $S_1,\ldots, S_n$ – список всех содержащихся в **A** универсалий.

Метатеорема 5.

Обобщенный перевод ω_1 *погружает* $\mathbf{C4}^C{}_A$ *в* $\mathbf{С\Phi}^C{}_A$.

Покажем сначала, что ω_1-переводы всех теорем $\mathbf{C4}^C{}_A$ доказуемы в фундаментальной силлогистике.

Рассмотрим доказательство $\mathbf{C}_1,\ldots, \mathbf{C}_k$ произвольной теоремы системы $\mathbf{C4}^C{}_A$ и методом возвратной индукции покажем для каждого $\mathbf{C}_i$, что $\mathbf{С\Phi}^C{}_A \vdash \omega_1(\mathbf{C}_i)$.

Пусть $\mathbf{C}_i$ – аксиома $\mathbf{C4}^C{}_A$. Аксиомы $\mathbf{A}^C{}_A\mathbf{1}$–$\mathbf{A}^C{}_A\mathbf{5}$ системы $\mathbf{C4}^C{}_A$ являются также аксиомами $\mathbf{С\Phi}^C{}_A$. Поэтому их ω_1-переводы выводятся в последней системе из соответствующих аксиом с использованием закона утверждения консеквента. ω_1-перевод аксиомы $\mathbf{A}^C{}_A\mathbf{7}$ представляет собой формулу $SiS \supset SiS$, которая является законом логики высказываний.

Пусть $\mathbf{C}_i$ получено из $\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}_j$ по *modus ponens*. Согласно индуктивному допущению, $\omega_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$ и $\omega_1(\mathbf{C}_j)$ доказуемы в $\mathbf{С\Phi}^C{}_A$. Получить отсюда утверждение о доказуемости $\omega_1(\mathbf{C}_i)$ можно используя рассуждение, аналогичное тому, которое применялось при доказательстве **Метатеоремы 14** третьей главы.

Пусть $\mathbf{C}_i$ получено из $\mathbf{C}_j$ по правилу **R2**. Тогда $\mathbf{C}_j = (vaS \ \&\ vaP) \supset \mathbf{A}$, а $\mathbf{C}_i = SiP \supset \mathbf{A}$. Множества универсалий в $\mathbf{C}_j$ и $\mathbf{C}_i$ совпадают.

1.	$\mathbf{С\Phi}^C{}_A \vdash \omega_1((vaS \ \&\ vaP) \supset \mathbf{A})$	индуктивное допущение
2.	$\mathbf{С\Phi}^C{}_A \vdash (S_1iS_1 \ \&\ \ldots\ \&\ S_niS_n) \supset ((vaS \ \&\ vaP) \supset \mathbf{A})$	1, опред. ω_1
3.	$\mathbf{С\Phi}^C{}_A \vdash (vaS \ \&\ vaP) \supset ((S_1iS_1 \ \&\ \ldots\ \&\ S_niS_n) \supset \mathbf{A})$	2; **ЛВ**
4.	$\mathbf{С\Phi}^C{}_A \vdash SiP \supset ((S_1iS_1 \ \&\ \ldots\ \&\ S_niS_n) \supset \mathbf{A})$	3; **R2**
5.	$\mathbf{С\Phi}^C{}_A \vdash (S_1iS_1 \ \&\ \ldots\ \&\ S_niS_n) \supset (SiP \supset \mathbf{A})$	4; **ЛВ**
6.	$\mathbf{С\Phi}^C{}_A \vdash \omega_1(SiP \supset \mathbf{A})$	5, определение ω_1

Случай, когда $\mathbf{C}_i$ получено по правилу **R3**, рассматривается аналогично.

Итак, ω_1-перевод любой теоремы $\mathbf{C4}^C{}_A$ доказуем в системе $\mathbf{С\Phi}^C{}_A$.

Зададим теперь обратный перевод из $\mathbf{С\Phi}^C{}_A$ в $\mathbf{C4}^C{}_A$:

$$\omega_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Поскольку $\mathbf{С\Phi}^C{}_A$ является подсистемой $\mathbf{C4}^C{}_A$, ω_2-перевод любой теоремы $\mathbf{С\Phi}^C{}_A$ доказуем в $\mathbf{C4}^C{}_A$.

Утверждение о том, что $\mathbf{C4}^C{}_A \vdash \mathbf{A} \equiv \omega_2(\omega_1(\mathbf{A}))$, доказывается точно так же, как и в **Метатеореме 14** третьей главы.

Таким образом, показано, что все три части критерия погружаемости выполняются. **Метатеорема 5** *доказана*.

Метатеорема 6.

Система $\mathbf{C4}^C{}_A$ *погружается в исчисление предикатов посредством обобщенного перевода* Θ.

Из доказанного ранее утверждения о погружаемости $\mathbf{С Ф}^{C}{}_{A}$ в **ИП** посредством обобщенной операции * и **Метатеоремы 5** следует, что система $\mathbf{C4}^{C}{}_{A}$ погружается в **ИП** посредством композиции ω_1 и *. Нетрудно показать (см. доказательство **Метатеоремы 15** Главы III), что данная композиция равносильна в **ИП** обобщенному переводу Θ.

§ 2. Сингулярные позитивные силлогистики в оккамовском языке

Перейдем к рассмотрению класса систем сингулярной позитивной силлогистики, основанных на двух описанных выше оккамовских принципах использования сингулярных терминов: 1) сингулярные термины допускаются как на места субъектов, так и на места предикатов; 2) высказывания с сингулярным субъектом не рассматриваются в качестве самостоятельного типа категорических высказываний, а могут быть либо общими, либо частными. Таким образом, здесь разрешается квантификация сингулярных терминов: «Всякий (некоторый) v есть (не есть) P». В этой связи необходимо пересмотреть их семантику, предположив, что значениями сингулярных терминов являются теперь не индивиды, а одноэлементные множества.

Язык сингулярной позитивной силлогистики, построенный на основе указанных выше принципов, будем условно называть *оккамовским*. В алфавит оккамовского языка, как и в алфавит языка аристотелевского типа, входят бесконечные списки универсалий и сингулярных терминов (для обозначения последних используем знаки v, w, v_1, w_1,...), пропозициональные связки и скобки. Но в данном языке содержатся лишь стандартные силлогистические константы ***a***, ***e***, ***i*** и ***o***.

Здесь существенным оказывается введение понятия силлогистического термина:

1. Всякая универсалия является силлогистическим термином.
2. Всякий сингулярный термин является силлогистическим термином.
3. Ничто иное не является силлогистическим термином.

Элементарными формулами в оккамовском языке являются выражения видов $S\boldsymbol{a}P$, $S\boldsymbol{e}P$, $S\boldsymbol{i}P$ и $S\boldsymbol{o}P$, где S и P – силлогистические термины любого из двух типов. Сложные формулы образуются из других формул с помощью пропозициональных связок.

В данном языке можно осуществить расширение различных систем чистой позитивной силлогистики. Как и в предыдущем параграфе, мы сформулируем сингулярные расширения систем **СФ**, **С2** и **С4**.

Система $\mathbf{С Ф}^{C}{}_{O}$

Принимаемая в фундаментальной силлогистике интерпретация категорических высказываний фиксировалась ранее посредством перевода * на язык логики предикатов. Однако при этом предполагалось, что субъектами и предикатами общих и частных высказываний могут быть только универсалии – термины, которые в логике предикатов выступают в качестве одноместных предикаторов (знаков свойств). В оккамовском силлогистическом языке, как уже говорилось, на местах субъектов и предикатов общих и частных высказываний могут находиться и сингулярные термины. Причем тип их значений в составе множественных высказываний в силлогистике (одноэлементные классы) отличается от типа значений сингулярных терминов в логике предикатов (индивиды). Свойство принадлежности классу, единственным элементом которого является объект v может быть выражено в *логике предикатов с равенством* ($\mathbf{ЛП}^{=}$) посредством предиката «$x = v$». Очевидно также, что свойство принадлежности классу S предмета x (где S – универсалия, представляющая класс предметов) можно выразить посредством предиката «Sx».

Итак, перевод силлогистических формул оккамовского языка мы должны осуществлять в язык логики предикатов, расширенный за счет введения символа =, причем переводу формул должно предшествовать отображение множества силлогистических терминов в множество предикатов $\mathbf{ЛП}^{=}$.

Функция θ, сопоставляющая силлогистическому термину некоторый предикат с одной предметной переменной x в языке $\mathbf{ЛП}^{=}$, определяется следующим образом:

$$\theta(v) = (x = v), \qquad \theta(S) = Sx,$$

где v – сингулярный термин, S – универсалия.

Теперь переопределим функцию * так, чтобы она сопоставляла формулам оккамовского силлогистического языка замкнутые формулы языка $\mathbf{ЛП}^{=}$ и выражала принимаемую в фундаментальной силлогистике интерпретацию категорических высказываний (S и P здесь являются произвольными силлогистическими терминами):

$$S\boldsymbol{a}P^* = \forall x(\theta(S) \supset \theta(P)), \qquad S\boldsymbol{e}P^* = \forall x(\theta(S) \supset \neg\theta(P)),$$
$$S\boldsymbol{i}P^* = \exists x(\theta(S) \,\&\, \theta(P)), \qquad S\boldsymbol{o}P^* = \exists x(\theta(S) \,\&\, \neg\theta(P)),$$
$$(\neg\mathbf{A})^* = \neg(\mathbf{A}^*), \qquad (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*.$$

Фундаментальной сингулярной силлогистикой в оккамовском языке назовем теорию, законом которой является любая формула **A** этого языка такая, что ее перевод **A*** является теоремой классического исчисления предикатов с равенством. Одна из аксиоматизаций данной теории – система $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$ – была построена В.И. Маркиным [36]. Схемы аксиом этой системы таковы:

$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{0}$. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{1}$. $v\mathbf{a}v$,	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{4}$. $(v\mathbf{a}P\ \&\ v\mathbf{a}S) \supset S\mathbf{i}P$,
$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{2}$. $v\mathbf{a}w \supset w\mathbf{a}v$,	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{5}$. $S\mathbf{e}P \equiv \neg S\mathbf{i}P$,
$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{3}$. $(M\mathbf{a}P\ \&\ v\mathbf{a}M) \supset v\mathbf{a}P$,	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{6}$. $S\mathbf{o}P \equiv \neg S\mathbf{a}P$.

В системе $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$ три правила вывода:

П1. *modus ponens*,

П2. $\dfrac{\vdash (v\mathbf{a}S\ \&\ v\mathbf{a}P) \supset \mathbf{A}}{\vdash S\mathbf{i}P \supset \mathbf{A},}$ **П3**. $\dfrac{\vdash (v\mathbf{a}S\ \&\ v\mathbf{e}P) \supset \mathbf{A}}{\vdash S\mathbf{o}P \supset \mathbf{A},}$

где v не содержится в заключении. S, P и M в формулировках аксиомных схем и правил – любые силлогистические термины (как универсалии, так и сингулярные), v и w – сингулярные термины.

Нетрудно показать, что система $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$ – расширение системы **СФ** чистой позитивной фундаментальной силлогистики. Доказательства в $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$ аксиом системы **СФ** аналогично их доказательствам в $\mathbf{СФ}^{C}_{A}$, представленным в предыдущем параграфе. Отличие состоит лишь в том, что вместо силлогистической константы $\dot{\mathbf{a}}$ должна стоять $\mathbf{a}$, а все вхождения константы $\dot{\mathbf{e}}$ должны быть заменены на $\mathbf{e}$. Кроме того, в качестве v в доказательствах аксиом выбирается сингулярный термин, отсутствующий в самих этих аксиомах. Остается доказать в $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$ аналог используемой в указанных выводах аксиомной схемы $\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{5}$ ($v\dot{\mathbf{e}}S \equiv \neg v\dot{\mathbf{a}}S$) системы $\mathbf{СФ}^{C}_{A}$ – формулу $v\mathbf{e}S \equiv \neg v\mathbf{a}S$:

1.	$(v\mathbf{a}S\ \&\ v\mathbf{a}v) \supset v\mathbf{i}S$	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{4}$
2.	$v\mathbf{a}v$	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{1}$
3.	$v\mathbf{a}S \supset v\mathbf{i}S$	1, 2; **ЛВ**
4.	$(w\mathbf{a}S\ \&\ v\mathbf{a}w) \supset v\mathbf{a}S$	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{3}$
5.	$w\mathbf{a}v \supset v\mathbf{a}w$	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{2}$
6.	$(w\mathbf{a}v\ \&\ w\mathbf{a}S) \supset v\mathbf{a}S$	4, 5; **ЛВ**
7.	$v\mathbf{i}S \supset v\mathbf{a}S$	6; **П2**
8.	$v\mathbf{e}S \equiv \neg v\mathbf{i}S$	$\mathbf{CA}^{C}_{O}\mathbf{5}$
9.	$v\mathbf{e}S \equiv \neg v\mathbf{a}S$	3, 7, 8; **ЛВ**

Сформулируем семантику исчисления $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$. Моделью является пара $<\mathbf{D}, \varphi>$, где $\mathbf{D} \neq \varnothing$, $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, а $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$, где S – универсалия. Далее определим в модели $<\mathbf{D}, \varphi>$ новую функцию σ, приписывающую значения любым силлогистическим терминам – как сингулярным, так и универсалиям. Такими значениями должны быть подклассы **D**. Сингулярному термину v функция σ приписывает класс, единственным элементом которого является объект, сопоставленный v посредством φ, т.е. $\sigma(v) = \{\varphi(v)\}$. А универсалии S функция σ сопоставит тот же класс, что и φ, т.е. $\sigma(S) = \varphi(S)$. Условия истинности формул типа $S\mathbf{a}P$, $S\mathbf{i}P$, $S\mathbf{e}P$, $S\mathbf{o}P$ оккамовского языка в модели $<\mathbf{D}, \varphi>$ отличаются от определений **И1–И4** предыдущего параграфа заменой φ на σ:

У1. $|S\mathbf{a}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\sigma(S) \subseteq \sigma(P)$,
У2. $|S\mathbf{i}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\sigma(S) \cap \sigma(P) \neq \varnothing$,
У3. $|S\mathbf{e}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\sigma(S) \cap \sigma(P) = \varnothing$,
У4. $|S\mathbf{o}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\sigma(S) \setminus \sigma(P) \neq \varnothing$.

Условия истинности сложных формул, понятия истинности в модели и $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$-общезначимости стандартные.

Справедливо утверждение о семантической непротиворечивости рассматриваемой системы $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$.

Метатеорема 7.

$$\dot\forall \mathbf{A}\,(\mathbf{СФ}^{C}_{O} \vdash \mathbf{A}\ \dot\supset\ \mathbf{СФ}^{C}_{O} \models \mathbf{A}).$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей метатеоремы для системы $\mathbf{СФ}^{C}_{A}$ – **Метатеоремы 1**.

Приступим к доказательству семантической полноты системы $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$. Понятия $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$-непротиворечивого и $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$-максимального множеств формул вводятся стандартно. Понятие насыщенности множества формул модифицируем применительно к данной системе. Назовем $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$-максимальное непротиворечивое множество формул $\blacktriangle$ $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$-насыщенным, е.т.е. выполняются два условия:

(i) $\dot\forall S \dot\forall P(S\mathbf{i}P \in \blacktriangle\ \dot\supset\ \dot\exists v(v\mathbf{a}S\ \&\ v\mathbf{a}P \in \blacktriangle))$,
(ii) $\dot\forall S \dot\forall P(S\mathbf{o}P \in \blacktriangle\ \dot\supset\ \dot\exists v(v\mathbf{a}S\ \&\ v\mathbf{e}P \in \blacktriangle))$,

где S и P – произвольные силлогистические термины.

Лемма 3.
Пусть **T** *– множество сингулярных терминов языка,* $\mathbf{T}_\Gamma$ *– множество сингулярных терминов, содержащихся в формулах из* **Г**. *Произвольное* $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$*-непротиворечивое множество формул* **Г**, *такое что* $\mathbf{T} \setminus \mathbf{T}_\Gamma$ *бесконечно, можно расширить до* $\mathbf{СФ}^{C}_{O}$*-насыщенного множества* $\blacktriangle$.

Опишем процедуру насыщения Г до $\blacktriangle$. Пусть $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots$ – пересчет всех формул оккамовского языка. Строим последовательность множеств $\blacktriangle_0, \blacktriangle_1, \ldots$ следующим образом. $\blacktriangle_0 = \Gamma$. $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n$, если $\blacktriangle_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ $\mathbf{С\Phi}^{C}_{O}$-противоречиво. В противном случае имеются три возможности: 1) если $\mathbf{C}_n \rightleftharpoons SiP$, то $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n \cup \{SiP, vaS \,\&\, vaP\}$, где v не входит в формулы из $\blacktriangle_n$; 2) если $\mathbf{C}_n \rightleftharpoons SoP$, то $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n \cup \{SoP, vaS \,\&\, veP\}$ с тем же ограничением на v; 3) если $\mathbf{C}_n$ имеет какой-либо другой вид, то $\blacktriangle_{n+1} = \blacktriangle_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$.

Пусть далее $\blacktriangle = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \blacktriangle_n$.

Доказательство $\mathbf{С\Phi}^{C}_{O}$-насыщенности множества $\blacktriangle$ аналогично доказательству **Леммы 1**. При демонстрации $\mathbf{С\Phi}^{C}_{O}$-непротиворечивости $\blacktriangle_{n+1}$ в случаях 1) и 2) существенным образом используются правила **П2** и **П3** рассматриваемого исчисления.

Определение канонической модели $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle} \rangle$ в семантике системы $\mathbf{С\Phi}^{C}_{O}$ в значительной степени отличается от соответствующего понятия для $\mathbf{С\Phi}^{C}_{A}$. Обозначим посредством символа V_v множество всех таких сингулярных терминов w, что формула wav содержится в $\blacktriangle$. $\mathbf{D}_{\blacktriangle}$ определяется как семейство множеств V_v для всякого сингулярного термина v, т.е. $\mathbf{D}_{\blacktriangle} = \{\mathrm{V}_v : \mathrm{V}_v = \{w : wav \in \blacktriangle\}\}$. Функция $\varphi_{\blacktriangle}$ приписывает произвольному сингулярному термину v класс V_v, а произвольной универсалии S семейство таких множеств V_v, что формула vaS принадлежит $\blacktriangle$, т.е. $\varphi_{\blacktriangle}(v) = \mathrm{V}_v$, а $\varphi_{\blacktriangle}(S) = \{\mathrm{V}_v : vaS \in \blacktriangle\}$. Ясно, что функция $\sigma_{\blacktriangle}$, задаваемая в $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle} \rangle$ указанным выше способом, припишет сингулярному термину v одноэлементный класс $\{\mathrm{V}_v\}$, а универсалии S – то же самое, что и $\varphi_{\blacktriangle}$. Необходимо теперь доказать следующую лемму, не имеющую аналога в рассмотренных ранее доказательствах полноты силлогистических исчислений.

Лемма 4.
Для любого сингулярного термина w, любого силлогистического термина S и произвольного $\mathbf{С\Phi}^{C}_{O}$*-насыщенного множества $\blacktriangle$ верно, что $\mathrm{V}_w \in \sigma_{\blacktriangle}(S)$, е.т.е. $waS \in \blacktriangle$.*

Доказательство включает рассмотрение двух случаев.

1. Пусть S – универсалия. Тогда $\sigma_{\blacktriangle}(S) = \varphi_{\blacktriangle}(S) = \{\mathrm{V}_v : vaS \in \blacktriangle\}$, откуда вытекает справедливость доказываемого утверждения.

2. Пусть S – сингулярный термин, например, $S \rightleftharpoons v$. Тогда $\sigma_{\blacktriangle}(v) = \{\varphi_{\blacktriangle}(v)\} = \{\mathrm{V}_v\}$. С учетом этого нам предстоит показать, что $\mathrm{V}_w = \mathrm{V}_v$, е.т.е. $wav \in \blacktriangle$.

1.	$\mathrm{V}_w = \mathrm{V}_v$	допущение
2.	$\dot{\forall} v_1(v_1aw \in \blacktriangle$, е.т.е. $v_1av \in \blacktriangle)$	1, опред. V_w и V_v
3.	$waw \in \blacktriangle$	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{1}$, св-во (а) максимального мн-ва
4.	$wav \in \blacktriangle$	2, 3; $\dot{\forall}_{и}$, (б)
5.	$\mathrm{V}_w = \mathrm{V}_v \;\dot{\supset}\; wav \in \blacktriangle$	1–4; $\dot{\supset}_{в}$
6.	$wav \in \blacktriangle$	допущение
7.	$v_1aw \in \blacktriangle$	допущение
8.	$((wav \,\&\, v_1aw) \supset v_1av) \in \blacktriangle$	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{3}$, (а)
9.	$v_1av \in \blacktriangle$	6, 7, 8; (г), (б)
10.	$\dot{\forall} v_1(v_1aw \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; v_1av \in \blacktriangle)$	7–9; $\dot{\supset}_{в}$, $\dot{\forall}_{в}$
11.	$v_1av \in \blacktriangle$	допущение
12.	$wav \supset vaw \in \blacktriangle$	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{2}$, (а)
13.	$vaw \in \blacktriangle$	6, 12; (б)
14.	$((vaw \,\&\, v_1av) \supset v_1aw) \in \blacktriangle$	$\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{3}$, (а)
15.	$v_1aw \in \blacktriangle$	13, 11, 14; (г), (б)
16.	$\dot{\forall} v_1(v_1av \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; v_1aw \in \blacktriangle)$	11–15; $\dot{\supset}_{в}$, $\dot{\forall}_{в}$
17.	$\mathrm{V}_w = \mathrm{V}_v$	10, 16; опред. V_w и V_v
18.	$wav \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; \mathrm{V}_w = \mathrm{V}_v$	6–17; $\dot{\supset}_{в}$
19.	$\mathrm{V}_w = \mathrm{V}_v$ е.т.е. $wav \in \blacktriangle$	5, 18; **ЛВ**

Теперь докажем лемму о равносильности утверждений об истинности произвольной формулы в канонической модели и о принадлежности ее насыщенному множеству:

Лемма 5.
Для произвольного $\mathbf{С\Phi}^{C}_{O}$*-насыщенного множества формул $\blacktriangle$ и произвольной формулы* $\mathbf{A}$ *имеет место* $|\mathbf{A}|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1}$, *е.т.е.* $\mathbf{A} \in \blacktriangle$

В базисе доказательства достаточно рассмотреть случаи, когда $\mathbf{A}$ имеет вид SaP и SiP, где S и P – любые силлогистические термины.

I. $\mathbf{A} \rightleftharpoons SaP$.

Докажем сначала, что $|SaP|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; SaP \in \blacktriangle$.

1.	$\vert SaP\vert_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\dot{\forall} v(\mathrm{V}_v \in \sigma_{\blacktriangle}(S) \;\dot{\supset}\; \mathrm{V}_v \in \sigma_{\blacktriangle}(P))$	1; **У1**
3.	$\dot{\forall} v(vaS \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; vaP \in \blacktriangle)$	2; **Лемма 4**
4.	$SaP \notin \blacktriangle$	допущение
5.	$SoP \in \blacktriangle$	4; $\mathbf{A}^{C}_{O}\mathbf{6}$, (а), (б)
6.	$\dot{\exists} v(vaS \,\&\, veP \in \blacktriangle)$	5; условие (ii)
7.	$vaS \in \blacktriangle$	6; $\dot{\exists}_{и}$, (г)

8.	$\nu eP \in \blacktriangle$	6; $\dot\exists_{\text{и}}$, (г)
9.	$\nu aP \in \blacktriangle$	3, 7; $\dot\forall_{\text{и}}$, $\dot\supset_{\text{и}}$
10.	$\nu eP \equiv \neg \nu aP \in \blacktriangle$	теорема $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\mathbf{0}}$, (а)
11.	$\nu aP \notin \blacktriangle$	8, 10; (б), (в)
12.	$SaP \in \blacktriangle$	9, 11; от противного

Докажем обратное утверждение.

1.	$SaP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$\mathrm{V}_\nu \in \sigma_\blacktriangle(S)$	допущение
3.	$\nu aS \in \blacktriangle$	2; **Лемма 4**
4.	$(SaP \,\&\, \nu aS) \supset \nu aP \in \blacktriangle$	$\mathbf{A}^{C}_{\mathbf{0}}\mathbf{5}$, (а)
5.	$\nu aP \in \blacktriangle$	1, 3, 4; (г), (б)
6.	$\mathrm{V}_\nu \in \sigma_\blacktriangle(P)$	5; **Лемма 4**
7.	$\dot\forall \nu(\mathrm{V}_\nu \in \sigma_\blacktriangle(S) \mathbin{\dot\supset} \mathrm{V}_\nu \in \sigma_\blacktriangle(P))$	2–6; $\dot\supset_{\text{в}}$, $\dot\forall_{\text{в}}$
8.	$|SaP|_{\varphi\blacktriangle} = \mathbf{1}$	7; **У1**

II. $\mathbf{A} = SiP$.

Докажем сначала, что $|SiP|_{\varphi\blacktriangle} = \mathbf{1} \mathbin{\dot\supset} SiP \in \blacktriangle$

1.	$|SiP|_{\varphi\blacktriangle} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\dot\exists \nu(\mathrm{V}_\nu \in \sigma_\blacktriangle(S) \,\&\, \mathrm{V}_\nu \in \sigma_\blacktriangle(P))$	1; **У2**
3.	$\nu aP \,\&\, \nu aS \in \blacktriangle$	2; $\dot\exists_{\text{и}}$, **Лемма 4**, (г)
4.	$(\nu aP \,\&\, \nu aS) \supset SiP \in \blacktriangle$	$\mathbf{A}^{C}_{\mathbf{0}}\mathbf{5}$, (а)
5.	$SiP \in \blacktriangle$	4, 3; (б)

Докажем обратное утверждение.

1.	$SiP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$\dot\exists \nu(\nu aS \,\&\, \nu aP \in \blacktriangle)$	1; условие (i)
3.	$\dot\exists \nu(\mathrm{V}_\nu \in \sigma_\blacktriangle(S) \mathbin{\dot\&} \mathrm{V}_\nu \in \sigma_\blacktriangle(P))$	2; (г), **Лемма 4**
4.	$|SiP|_{\varphi\blacktriangle} = \mathbf{1}$	3; **У2**

Доказательство индуктивного перехода тривиально.

Из **Лемм 3** и **5** следует утверждение о семантической полноте системы $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\mathbf{0}}$:

Метатеорема 8.

$$\dot\forall \mathbf{A}(\mathbf{С\Phi}^{C}_{\mathbf{0}} \vDash \mathbf{A} \mathbin{\dot\supset} \mathbf{С\Phi}^{C}_{\mathbf{0}} \vdash \mathbf{A}).$$

Таким образом, мы завершили первую часть доказательства погружаемости $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\mathbf{0}}$ в исчисление предикатов с равенством, про-

демонстрировав, что класс теорем этой системы равен классу $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\mathbf{0}}$-общезначимых формул.

Следующий этап заключается в обосновании утверждения о том, что произвольная силлогистическая формула **A** является общезначимой, е.т.е. ее перевод **A*** универсально общезначим в логике предикатов с равенством (ЛП$^{=}$). Как известно, атомарные формулы языка ЛП$^{=}$ вида $t_1 = t_2$ (где t_1 и t_2 – термы) в модели <**D**, φ> принимают значение **1** при некотором приписывании элементов **D** предметным переменным в том случае, когда значения t_1 и t_2 совпадают в данной модели при данном приписывании. Нас особо будут интересовать условия истинности формул типа $x = v$, где x – переменная, а v – константа. Напомним, что предикат $x = v$ выражает свойство «быть тождественным объекту v», и единичный класс предметов, обладающих этим свойством, по существу, является значением сингулярного термина v в составе категорических высказываний оккамовского языка. Условия истинности формул вида $x = v$ таковы:

$|x = v|_\varphi = \mathbf{1}$ при приписывании переменной x объекта **d** из **D**, е.т.е. $\mathbf{d} = \varphi(v)$.

Исходя из того, что модель <**D**, φ> используется для оценки как силлогистических формул, так и формул языка логики предикатов с равенством, докажем две леммы, устанавливающие определенные связи между семантикой системы $\mathbf{С\Phi}^{C}_{\mathbf{0}}$ и ЛП$^{=}$.

Лемма 6.
Для произвольной модели <**D**, φ>, *произвольного силлогистического термина S имеет место:* $\mathbf{d} \in \sigma(S)$, *е.т.е.* $|\theta(S)| = \mathbf{1}$ *при приписывании x объекта* **d**, *где* **d** – *произвольный элемент* **D**.

Необходимо рассмотреть случай, когда S – сингулярный термин, и случай, когда S – универсалия.

1. Пусть $S = v$. Тогда $\mathbf{d} \in \sigma(v)$, е.т.е. $\mathbf{d} = \varphi(v)$ (по определению σ), е.т.е. $|x = v|_\varphi = \mathbf{1}$ при приписывании x объекта **d** (в силу условия истинности формулы $x = v$), е.т.е. $|\theta(v)| = \mathbf{1}$ при данном приписывании (по определению θ).

2. Пусть S – универсалия. Тогда $\mathbf{d} \in \sigma(S)$, е.т.е. $\mathbf{d} \in \varphi(S)$ (по определению σ), е.т.е. $|S\,x|_\varphi = \mathbf{1}$ при приписывании переменной x объекта **d** (в силу условия истинности формулы Sx), е.т.е. $|\theta(S)| = \mathbf{1}$ при данном приписывании (по определению θ).

Лемма 7.

Для любой формулы **A** *оккамовского языка и любой модели* $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ *верно, что* **A** *истинна в* $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$, *е.т.е. ее перевод* $\mathbf{A}^*$ *истинен в этой модели.*

Доказательство ведется индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле **A**. Базис индукции включает четыре случая.

I. Пусть $\mathbf{A} = SaP$. Тогда $\mathbf{A}^* = \forall x(\theta(S) \supset \theta(P))$.

$|SaP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\sigma(S) \subseteq \sigma(P)$ (в силу **У1**), е.т.е. $\dot{\forall}\mathbf{d}$ ($\mathbf{d} \in \sigma(S) \supset \mathbf{d} \in \sigma(P)$) (по определению $\subseteq$), е.т.е. $\dot{\forall}\mathbf{d}$ ($|\theta(S)| = \mathbf{1}$ при приписывании x объекта $\mathbf{d}$ $\supset$ $|\theta(P)| = \mathbf{1}$ при данном приписывании) (в силу **Леммы 6**), е.т.е. $\dot{\forall}\mathbf{d}$ ($|\theta(S) \supset \theta(P)| = \mathbf{1}$ при приписывании x объекта $\mathbf{d}$) (в силу условий истинности для $\supset$), е.т.е. $|\forall x(\theta(S) \supset \theta(P))| = \mathbf{1}$ (в силу условий истинности для $\forall$).

В случаях, когда **II.** $\mathbf{A} = SiP$, **III.** $\mathbf{A} = SeP$, **IV.** $\mathbf{A} = SoP$, доказательства аналогичны. Индуктивный переход доказывается тривиально.

Из **Леммы 7** выводится следующее утверждение:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}} \vDash \mathbf{A} \text{ е.т.е. } \mathbf{ЛП}^{=} \vDash \mathbf{A}^*).$$

Отсюда с учетом семантической непротиворечивости и полноты системы $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ и исчисления предикатов с равенством ($\mathbf{ИП}^{=}$) получаем окончательно утверждение о погружаемости $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ в $\mathbf{ИП}^{=}$ посредством функции *, заданной в данном параграфе:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}} \vdash \mathbf{A} \text{ е.т.е. } \mathbf{ИП}^{=} \vdash \mathbf{A}^*).$$

Система $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$

Рассмотрим теперь другую теорию сингулярной позитивной силлогистики в оккамовском языке – расширение системы **C2**.

Интерпретация категорических высказываний этой теории может быть выражена посредством следующего их перевода на язык $\mathbf{ЛП}^{=}$:

$SaP^{\wedge} = \forall x(\theta(S) \supset \theta(P)) \,\&\, \exists x\theta(S)$,
$SeP^{\wedge} = \forall x(\theta(S) \supset \neg\theta(P))$,
$SiP^{\wedge} = \exists x(\theta(S) \,\&\, \theta(P))$,
$SoP^{\wedge} = \exists x(\theta(S) \,\&\, \neg\theta(P)) \vee \neg\exists x\theta(S)$,

где S и P – произвольные силлогистические термины, а функция θ задается так же, как и ранее. Перевод $^{\wedge}$ обычным способом распространяется на сложные формулы языка силлогистики.

Исчисление $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$, аксиоматизирующее данную теорию, построено В.И. Маркиным [36]. Оно получается из $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ за счет присоединения схемы аксиом

$\mathbf{A}^{C}{}_{\mathbf{O}}\mathbf{7}$. $SaP \supset SiS$,

а также замены **П3** на следующее правило вывода:

$$\mathbf{П3'} \quad \frac{\vdash (vaS \,\&\, veP) \supset \mathbf{A}}{\vdash (SaP \,\&\, SiS) \supset \mathbf{A}}$$

где v не содержится в заключении.

Для доказательства погружаемости $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ в исчисление предикатов с равенством, необходимо задать прежде всего перевод из $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ в $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$, композиция которого с операцией * равносильна сформулированной выше функции $^{\wedge}$. В качестве такого перевода будем использовать функцию χ_1, задаваемую так же, как и в §4 Главы III, но имеющую теперь в качестве области определения и области значений множество формул языка сингулярной позитивной силлогистики оккамовского типа.

Покажем, что функция χ_1 погружает $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ в $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$.

Метатеорема 9.

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}} \vdash \chi_1(\mathbf{A})).$$

Покажем сначала, что χ_1-переводы всех теорем $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ доказуемы в $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$.

Обратим внимание на то, что формулы типа vIv являются теоремами $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ (а также и теоремами $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$):

1.	vav	$\mathbf{A}^{C}{}_{\mathbf{O}}\mathbf{1}$
2.	$(vav \,\&\, vav) \supset vIv$	$\mathbf{A}^{C}{}_{\mathbf{O}}\mathbf{4}$
3.	vIv	1, 2; **ЛВ**

С помощью теорем данного вида, а также аксиом $\mathbf{A}^{C}{}_{\mathbf{O}}\mathbf{1}$–$\mathbf{A}^{C}{}_{\mathbf{O}}\mathbf{6}$, правил **П1–П3** можно доказать в $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ χ_1-переводы всех аксиомных схем системы $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$, а также обосновать инвариантность правил **П1**, **П2** и **П3'** относительно доказуемости в $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ χ_1-переводов.

Обратный перевод из $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ в $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ представляет собой обобщение функции χ_2 §4 Главы III до языка сингулярной силлогистики. Используя теоремы $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ вида vIv, а также аксиомные схемы и правила вывода этой системы, несложно показать, что χ_2-переводы всех теорем $\mathbf{С\Phi}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ доказуемы в $\mathbf{C2}^{C}{}_{\mathbf{O}}$.

Последняя часть доказательства – демонстрация индукцией по числу пропозициональных связок в **A** того, что формулы вида **A** ≡ $\chi_2(\chi_1(\mathbf{A}))$ являются теоремами **C2**$^{C}_{O}$. Базис индукции сводится к случаям, когда **A** имеет вид SaP и SiP. Если **A** = SiP, то $\chi_2(\chi_1(\mathbf{A}))$ = **A**. В случае же **A** = SaP доказательство соответствующей эквиваленции представлено в предыдущем параграфе (**Метатеорема 3**). Индуктивные переходы обосновываются тривиально.

Используя результаты о погружаемости **СФ**$^{C}_{O}$ в **ИП**$^{=}$ посредством функции * данного параграфа, а также о погружаемости **C2**$^{C}_{O}$ в **СФ**$^{C}_{O}$ посредством χ_1, легко доказать следующую метатеорему:

Метатеорема 10.
C2$^{C}_{O}$ *погружается в исчисление предикатов с равенством композицией переводов* χ_1 *и* *.

***Система* C4**$^{C}_{O}$

Завершим рассмотрение сингулярных позитивных силлогистик в оккамовском языке построением системы **C4**$^{C}_{O}$ – соответствующего расширения силлогистики Лукасевича **C4**. Данная система получается добавлением к исчислению **СФ**$^{C}_{O}$ новой схемы аксиом:

A$^{C}_{O}$**7**. SiS.

Имеются веские основания считать именно систему **C4**$^{C}_{O}$ адекватной современной формализацией сингулярного позитивного фрагмента традиционной силлогистики. Действительно, в том варианте силлогистики, который излагается в учебниках по традиционной логике, допускается использование сингулярных терминов на предикатной позиции, а единичные высказывания сводятся к множественным (обычно к общим). Кроме того, с семантической точки зрения, в системе **C4**$^{C}_{O}$ принимается характерная для традиционной версии силлогистики предпосылка о непустоте силлогистических терминов.

Зададим перевод, фиксирующий указанную экзистенциальную предпосылку, формул рассматриваемого силлогистического языка на язык логики предикатов с равенством и докажем адекватность данного перевода. По традиции используем для его обозначения символ Θ.

Пусть **A** – произвольная формула оккамовского варианта языка сингулярной позитивной силлогистики, * – определенный в данном параграфе перевод, погружающий систему **СФ**$^{C}_{O}$ в **ИП**$^{=}$. Пусть $S_1,\ldots, S_n$ – список всех содержащихся в формуле **A** универсалий. Если данный список непуст, то

$$\Theta(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \ \& \ \ldots \ \& \ \exists x S_n x) \supset \mathbf{A}^*;$$

а в случае, когда **A** не содержит универсалий, т.е. силлогистическими терминами в составе **A** являются лишь сингулярные термины, –

$$\Theta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^*.$$

При переводе на язык логики предикатов с равенством формул языка **C4**$^{C}_{O}$ нет необходимости явно выражать предпосылку о непустоте сингулярных терминов, поскольку формула $\exists x(x = v)$, содержащая информацию о непустоте термина v, доказуема в **ИП**$^{=}$.

В ходе обоснования тезиса о погружаемости **C4**$^{C}_{O}$ в **ИП**$^{=}$ посредством Θ, как и в рассмотренных ранее аналогичных случаях, используем в качестве «промежуточной» фундаментальную силлогистику, на этот раз – систему **СФ**$^{C}_{O}$.

Зададим перевод ω_1 из **C4**$^{C}_{O}$ в **СФ**$^{C}_{O}$. Пусть $S_1,\ldots, S_n$ – список всех универсалий, содержащихся в произвольной формуле **A** языка этих силлогистик. Если данный список непуст, то

$$\omega_1(\mathbf{A}) = (S_1 i S_1 \ \& \ \ldots \ \& \ S_n i S_n) \supset \mathbf{A},$$

а в случае отсутствия универсалий в составе **A** –

$$\omega_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Метатеорема 11.
Модифицированный перевод ω_1 *погружает* **C4**$^{C}_{O}$ *в* **СФ**$^{C}_{O}$.

Покажем сначала, что ω_1-переводы всех теорем **C4**$^{C}_{O}$ доказуемы в силлогистике **СФ**$^{C}_{O}$.

Рассмотрим доказательство $\mathbf{C}_1,\ldots, \mathbf{C}_k$ произвольной теоремы системы **C4**$^{C}_{O}$ и методом возвратной индукции покажем для каждого $\mathbf{C}_i$, что **СФ**$^{C}_{O}$ $\vdash \omega_1(\mathbf{C}_i)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{C}_i$ – аксиома **C4**$^{C}_{O}$. Аксиомы **A**$^{C}_{O}$**1** и **A**$^{C}_{O}$**2** системы **C4**$^{C}_{O}$ не содержат в своем составе универсалий, их ω_1-переводы совпадают с ними самими и являются аксиомами **СФ**$^{C}_{O}$. Аксиомы **A**$^{C}_{O}$**3**–**A**$^{C}_{O}$**6** системы **C4**$^{C}_{O}$ являются также аксиомами **СФ**$^{C}_{O}$. Поэтому если они не содержат универсалий, их ω_1-переводы доказуемы в **СФ**$^{C}_{O}$. Если же эти аксиомы содержат в своем составе универсалии, их ω_1-переводы выводятся в последней системе из соответствующих аксиом с использованием частного случая закона утверждения консеквента – $\mathbf{C}_i \supset ((S_1 i S_1 \ \& \ \ldots \ \& \ S_n i S_n) \supset \mathbf{C}_i)$. ω_1-перевод аксиомы **A**$^{C}_{O}$**7** , если S – универсалия, является законом логики высказываний $SiS \supset SiS$. Если же S – сингулярный термин, например v, то

ω_1-перевод данной аксиомы есть формула viv, доказательство которой в системе **СФ**$^{C}_{O}$ приведено выше.

Пусть $\mathbf{C}_i$ в составе доказательства $\mathbf{C}_1,\ldots,\mathbf{C}_k$ в системе **С4**$^{C}_{O}$ получена по правилу *modus ponens* из предыдущих формул этой последовательности $\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}_j$. По индуктивному допущению, **СФ**$^{C}_{O}$ $\vdash \omega_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$ и **СФ**$^{C}_{O}$ $\vdash \omega_1(\mathbf{C}_j)$. Рассмотрим четыре случая в зависимости от того, содержатся ли в составе формул $\mathbf{C}_j$ и $\mathbf{C}_i$ универсалии.

1) Ни $\mathbf{C}_j$, ни $\mathbf{C}_i$ не содержат универсалий. Тогда $\omega_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = \mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$, $\omega_1(\mathbf{C}_j) = \mathbf{C}_j$. Формула $\omega_1(\mathbf{C}_i)$, совпадающая с $\mathbf{C}_i$, может быть получена в системе **СФ**$^{C}_{O}$ по *modus ponens*.

2) $\mathbf{C}_j$ не содержит, а $\mathbf{C}_i$ содержит универсалии (например, $S_1,\ldots, S_n$). В этом случае $\omega_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (S_1iS_1 \;\&\; \ldots \;\&\; S_niS_n) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$, а $\omega_1(\mathbf{C}_j) = \mathbf{C}_j$. Формула $\omega_1(\mathbf{C}_i)$, совпадающая с $(S_1iS_1 \;\&\; \ldots \;\&\; S_niS_n) \supset \mathbf{C}_i$, выводится в **СФ**$^{C}_{O}$ из этих двух теорем с использованием закона коммутации и правила *modus ponens*.

3) $\mathbf{C}_i$ не содержит, а $\mathbf{C}_j$ содержит универсалии ($S_1,\ldots, S_n$). Тогда $\omega_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (S_1iS_1 \;\&\; \ldots \;\&\; S_niS_n) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$, а $\omega_1(\mathbf{C}_j) = (S_1iS_1 \;\&\; \ldots \;\&\; S_niS_n) \supset \mathbf{C}_j$. С использованием закона самодистрибутивности импликации из этих двух формул выводим в **СФ**$^{C}_{O}$ формулу $(S_1iS_1 \;\&\; \ldots \;\&\; S_niS_n) \supset \mathbf{C}_i$. Рассуждением от противного покажем, что и формула $\mathbf{C}_i$ в этом случае будет теоремой **СФ**$^{C}_{O}$. Допустим, что это не так. Тогда в силу **Метатеоремы 8** $\mathbf{C}_i$ не является **СФ**$^{C}_{O}$-общезначимой, т.е. найдется модель <**D**, φ>, в которой $\mathbf{C}_i$ ложна. Пусть функция означивания φ' всем силлогистическим терминам, кроме универсалий $S_1,\ldots, S_n$, сопоставляет те же значения, что и φ, а $\varphi'(S_1) = \ldots = \varphi'(S_n) = \mathbf{D}$. В силу непустоты множества **D** каждая из формул $S_1iS_1, \ldots, S_niS_n$, а значит и их конъюнкция, истинны в модели <**D**, φ'>. Поскольку $\mathbf{C}_i$ не содержит универсалий $S_1,\ldots, S_n$, она будет иметь в <**D**, φ'> то же значение, что и в <**D**, φ>, а именно значение «ложь». Следовательно, формула $(S_1iS_1 \;\&\; \ldots \;\&\; S_niS_n) \supset \mathbf{C}_i$ ложна в <**D**, φ'>. Тогда она не является **СФ**$^{C}_{O}$-общезначимой, и по **Метатеореме 7,** не доказуема в исчислении **СФ**$^{C}_{O}$. Последнее утверждение вступает в противоречие с ранее полученным. Таким образом, допущение о недоказуемости формулы $\mathbf{C}_i$ в **СФ**$^{C}_{O}$ опровергнуто, а в данном случае $\mathbf{C}_i$ совпадает с $\omega_1(\mathbf{C}_i)$. Поэтому **СФ**$^{C}_{O}$ $\vdash \omega_1(\mathbf{C}_i)$.

4) Обе формулы – $\mathbf{C}_j$ и $\mathbf{C}_i$ – содержат в своем составе универсалии. Обосновываем доказуемость $\omega_1(\mathbf{C}_i)$ рассуждая аналогично тому, как при доказательстве **Метатеоремы 14** третьей главы.

Пусть $\mathbf{C}_i$ получено из $\mathbf{C}_j$ по правилу **П2**. Тогда $\mathbf{C}_j = (\tilde{a}aS \;\&\; \tilde{a}aP) \supset \mathbf{A}$, а $\mathbf{C}_i = SiP \supset \mathbf{A}$. Очевидно, что множества универсалий в $\mathbf{C}_j$ и $\mathbf{C}_i$ совпадают. Если эти множества пусты, то $\omega_1(\mathbf{C}_i)$, совпадающая с $\mathbf{C}_i$, выводится в системе **СФ**$^{C}_{O}$ из $\omega_1(\mathbf{C}_j)$, совпадающей с $\mathbf{C}_j$, по правилу **П2**. Если же $\mathbf{C}_j$ содержит в своем составе универсалии $S_1,\ldots, S_n$, рассуждаем как при рассмотрении случая **R2 Метатеоремы 5** предыдущего параграфа (меняя в самом рассуждении константу $\tilde{a}$ на a, а в его анализе ссылку на правило **R2** ссылкой на применение **П2**).

Аналогичным образом рассматривается случай, когда $\mathbf{C}_i$ получено из $\mathbf{C}_j$ по правилу **П3**.

Индуктивное рассуждение завершено. Показано, что ω_1-перевод любой теоремы **С4**$^{C}_{O}$ доказуем в системе **СФ**$^{C}_{O}$.

Задаем обратный перевод ω_2 из **СФ**$^{C}_{O}$ в **С4**$^{C}_{O}$:

$$\omega_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Поскольку исчисление **СФ**$^{C}_{O}$ является подсистемой **С4**$^{C}_{O}$, ω_2-перевод любой теоремы **СФ**$^{C}_{O}$ доказуем в **С4**$^{C}_{O}$.

Остается удостовериться в выполнении третьей части критерия погружаемости В.А. Смирнова – в том, что **С4**$^{C}_{O}$ $\vdash \mathbf{A} \equiv \omega_2(\omega_1(\mathbf{A}))$ для любой формулы **A**. Если **A** не содержит универсалий, то $\omega_2(\omega_1(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$, а $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ – теорема **С4**$^{C}_{O}$. Если же **A** содержит универсалии, то формула $\mathbf{A} \equiv \omega_2(\omega_1(\mathbf{A}))$ доказывается в **С4**$^{C}_{O}$ так же, как и в **Метатеореме 14** Главы III. **Метатеорема 11** *доказана*.

Метатеорема 12.

Система **С4**$^{C}_{O}$ *погружается в исчисление предикатов посредством перевода* Θ, *заданного в данном параграфе.*

Из доказанного ранее утверждения о погружаемости **СФ**$^{C}_{O}$ в **ИП**$^{=}$ посредством функции * данного параграфа и **Метатеоремы 11** следует, что система **С4**$^{C}_{O}$ погружается в **ИП**$^{=}$ посредством композиции ω_1 и *. Данная композиция равносильна в **ИП**$^{=}$ переводу Θ. Если силлогистическая формула **A** не содержит универсалий, то $[\omega_1(\mathbf{A})]^* = \mathbf{A}^* = \Theta(\mathbf{A})$. В противном случае, осуществляем рассуждение, аналогичное содержащемуся в доказательстве **Метатеоремы 15** Главы III.

Глава VIII

СИНГУЛЯРНЫЕ НЕГАТИВНЫЕ СИЛЛОГИСТИКИ

§ 1. Языки сингулярных негативных силлогистик

В данной главе рассматриваются системы сингулярной негативной силлогистики. Их специфика состоит в наличии в алфавите системы, во-первых, нелогических символов особого рода – сингулярных терминов, и во-вторых, одного терминообразующего оператора «~» – знака терминного отрицания.

В предыдущей главе выделялись два способа введения сингулярных терминов в язык силлогистической теории – аристотелевский и оккамовский. В «аристотелевском» языке сингулярные термины могут занимать только позицию субъекта, и для сингулярных высказываний имеются особые силлогистические константы. В «оккамовском» языке сингулярные термины могут занимать как субъектную, так и предикатную позицию, и единичные высказывания не имеют собственных силлогистических констант, а рассматриваются как разновидность общих или частных высказываний.

Присоединение к языку сингулярной силлогистики оператора терминного отрицания в каждом из этих случаев имеет свои специфические особенности. Поэтому оправданным представляется выделение двух типов систем сингулярной негативной силлогистики, которые различаются не только наборами исходных силлогистических констант и способами построения элементарных формул, но и правилами образования отрицательных терминов.

При первом подходе (в аристотелевском силлогистическом языке) терминное отрицание применимо только к универсалиям, но никак не к сингулярным терминам. При этом, как и в чистых негативных силлогистиках, сами универсалии могут иметь структуру различного уровня сложности: универсалии, содержащиеся в алфавите языка, являются простыми (положительными), а те, которые образуются с использованием символа «~», – сложными (отрицательными). Сингулярные же термины могут быть только простыми.

При другом подходе (который был назван оккамовским) отрицательные термины могут быть образованы из любых терминов – как универсалий, так и сингулярных. С семантической точки зрения, это оправдывается тем обстоятельством, что в данном языке термины обоих типов репрезентируют классы предметов: универсалии – классы произвольной мощности, а сингулярные термины – одноэлементные

классы. Оператор терминного отрицания образует из силлогистического термина более сложный термин, также репрезентирующий некоторый класс предметов.

Зададим точным образом два варианта языка сингулярной негативной силлогистики.

Алфавит языка аристотелевского типа содержит: бесконечный список простых (положительных) универсалий, бесконечный список сингулярных терминов, силлогистические константы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{o}$ для множественных высказываний, особые силлогистические константы $\boldsymbol{\check{a}}$ (для единичноутвердительных) и $\boldsymbol{\check{e}}$ (для единичноотрицательных высказываний), знак ~ терминного отрицания, пропозициональные связки и скобки.

Далее в аристотелевском языке задаем правила оперирования терминным отрицанием. С этой целью следующим образом вводится понятие универсалии:

1. Любая простая универсалия является универсалией;
2. Если S – универсалия, то $\sim S$ – универсалия;
3. Ничто иное не является универсалией.

Наконец, определяем понятие формулы сингулярной негативной силлогистики в аристотелевском языке:

1. Если S и P – универсалии, то выражения типов $S\boldsymbol{a}P$, $S\boldsymbol{i}P$, $S\boldsymbol{e}P$, $S\boldsymbol{o}P$ являются формулами;
2. Если S – универсалия, а v – сингулярный термин, то выражения типов $v\boldsymbol{\check{a}}S$ и $v\boldsymbol{\check{e}}S$ суть формулы;
3. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – формулы, то $\neg\mathbf{A}$, $(\mathbf{A}\ \&\ \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \equiv \mathbf{B})$ – формулы;
4. Ничто иное не есть формула.

Заметим, что понятие формулы совершенно аналогично соответствующему понятию сингулярной позитивной силлогистики, разница лишь в том, что в качестве S и P в формулах $S\boldsymbol{a}P$, $S\boldsymbol{i}P$, $S\boldsymbol{e}P$, $S\boldsymbol{o}P$, $v\boldsymbol{\check{a}}S$, $v\boldsymbol{\check{e}}S$ выступают теперь произвольные универсалии – как положительные (простые), так и отрицательные (сложные).

Алфавит языка оккамовского типа содержит: бесконечный список простых универсалий, бесконечный список сингулярных терминов, силлогистические константы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{o}$, знак ~ терминного отрицания, пропозициональные связки и скобки.

Далее в оккамовском языке вводится понятие силлогистического термина:

1. Всякая простая универсалия есть силлогистический термин;
2. Всякий сингулярный термин есть силлогистический термин;
3. Если S – силлогистический термин, то $\sim S$ – силлогистический термин;
4. Ничто иное не является силлогистическим термином.

Элементарными формулами оккамовского сингулярного негативного языка являются выражения видов SaP, SeP, SiP и SoP, где S и P – силлогистические термины любого из трех типов. Сложные формулы образуются обычным образом с помощью пропозициональных связок.

В заданных языках возможно построение сингулярных негативных расширений для различных систем чистой позитивной силлогистики, сформулированных в Главе III. В данной работе мы ограничимся рассмотрением четырех наиболее важных теорий данного типа. Прежде всего, мы исследуем фундаментальные версии сингулярной негативной силлогистики как для аристотелевского, так и для оккамовского языка. Особую значимость имеют формальные реконструкции двух известных в истории логики силлогистических теорий с сингулярными и отрицательными терминами: силлогистики Аристотеля (ее построение осуществляется в языке первого типа) и того варианта силлогистики, который излагается в учебниках по традиционной логике (он формулируется в языке второго типа).

При исследовании различных систем сингулярной негативной силлогистики мы будем обращать особое внимание на важнейшую их дедуктивную характеристику – наличие или отсутствие так называемых *законов превращения*, позволяющих выводить из высказывания с предикатом P высказывание с предикатом $\sim P$, и наоборот.

§ 2. Фундаментальная сингулярная негативная силлогистика в аристотелевском языке

Фундаментальный вариант сингулярной негативной силлогистики в аристотелевском языке был рассмотрен В.И. Маркиным в [36]. Соответствующее аксиоматическое исчисление **НСФ**$^{C}_{A}$ строится как расширение системы сингулярной позитивной силлогистики **СФ**$^{C}_{A}$, рассмотренной в предыдущей главе.

Система **НСФ**$^{C}_{A}$ содержит все схемы аксиом **А**$^{C}_{A}$**1**–**А**$^{C}_{A}$**5** и правила вывода **R1**–**R3** системы **СФ**$^{C}_{A}$ (с учетом того, что S и P в их формулировках обозначают теперь как простые, так и сложные универсалии), а также дополнительную схему аксиом:

Н$^{C}_{A}$**1**. $v\grave{e}S \equiv v\grave{a}{\sim}S$.

Схема **Н**$^{C}_{A}$**1** в явном виде выражает один из законов превращения (для единичноотрицательных высказываний). Покажем, что в **НСФ**$^{C}_{A}$ доказуемы законы превращения и для других высказываний.

Т1. $v\grave{a}S \equiv v\grave{e}{\sim}S$.

1.	$v\grave{e}S \equiv \neg v\grave{a}S$	**А**$^{C}_{A}$**5**
2.	$v\grave{e}{\sim}S \equiv \neg v\grave{a}{\sim}S$	**А**$^{C}_{A}$**5**
3.	$v\grave{e}S \equiv v\grave{a}{\sim}S$	**Н**$^{C}_{A}$**1**
4.	$v\grave{a}S \equiv v\grave{e}{\sim}S$	1, 2, 3; **ЛВ**

Т2. $SiP \equiv So{\sim}P$.

1.	$(Sa{\sim}P \;\&\; v\grave{a}S) \supset v\grave{a}{\sim}P$	**А**$^{C}_{A}$**1**
2.	$v\grave{e}{\sim}P \equiv \neg v\grave{a}{\sim}P$	**А**$^{C}_{A}$**5**
3.	$v\grave{a}P \equiv v\grave{e}{\sim}P$	**Т1**
4.	$So{\sim}P \equiv \neg Sa{\sim}P$	**А**$^{C}_{A}$**4**
5.	$(v\grave{a}S \;\&\; v\grave{a}P) \supset So{\sim}P$	1, 2, 3, 4; **ЛВ**
6.	$SiP \supset So{\sim}P$	5; **R2**
7.	$(v\grave{a}P \;\&\; v\grave{a}S) \supset SiP$	**А**$^{C}_{A}$**2**
8.	$(v\grave{a}S \;\&\; v\grave{e}{\sim}P) \supset SiP$	3, 7; **ЛВ**
9.	$So{\sim}P \supset SiP$	8; **R3**
10.	$SiP \equiv So{\sim}P$	6, 9; **ЛВ**

Т3. $SeP \equiv Sa{\sim}P$.

Продолжим предыдущее доказательство:

11.	$SeP \equiv \neg SiP$	**А**$^{C}_{A}$**3**
12.	$SeP \equiv Sa{\sim}P$	4, 11, 10; **ЛВ**

Т4. $SoP \equiv Si{\sim}P$.
Т5. $SaP \equiv Se{\sim}P$.
Доказательства этих теорем сходны с доказательствами **Т2** и **Т3**.

В системе **НСФ**$^{C}_{A}$ доказуемы также законы снятия и введения двойного терминного отрицания. Покажем справедливость некоторых из них, используя допустимые в данной системе эквивалентные преобразования:

$v\grave{a}{\sim}{\sim}S \equiv v\grave{e}{\sim}S \equiv v\grave{a}S$ – использованы **Н**$^{C}_{A}$**1** и **Т1**,

$Sa{\sim}{\sim}P \equiv Se{\sim}P \equiv SaP$ – использованы **Т3** и **Т5**,

${\sim}{\sim}SaP \equiv {\sim}{\sim}Se{\sim}P \equiv {\sim}Pe{\sim}{\sim}S \equiv {\sim}Pa{\sim}S \equiv {\sim}PeS \equiv Se{\sim}P \equiv SaP$
– использованы **Т5**, **СФ3**, **Т5**, **Т3**, **СФ3**, **Т5**.

Семантика системы **НСФ**$^{C}_{A}$ строится как обобщение семантики **СФ**$^{C}_{A}$. Моделью является пара $\langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$, где, как и раньше, $\mathbf{D} \neq \varnothing$, $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$, где S – простая универсалия. Далее необходимо задать функцию, приписывающую значения произвольным универсалиям. С этой целью расширяем область определения φ, включив в нее сложные универсалии, и постулируем условие $\varphi(\sim S) = \mathbf{D} \setminus \varphi(S)$. Условия истинности **И1–И6** элементарных силлогистических формул сохраняются с учетом того, что S и P обозначают теперь универсалии любой сложности.

Доказательство семантической непротиворечивости **НСФ**$^{C}_{A}$ полностью включает в себя аналогичное доказательство для системы **СФ**$^{C}_{A}$ (см. **Метатеорему 1** предыдущей главы), а также несложную демонстрацию **СФ**$^{C}_{A}$-общезначимости новых аксиом типа $\mathbf{H}^{C}_{A}\mathbf{1}$.

Условия *насыщенности* произвольного **НСФ**$^{C}_{A}$-максимального непротиворечивого множества также совпадает с условиями (i) и (ii) для системы **СФ**$^{C}_{A}$. **Лемма 1** о возможности расширения произвольного **НСФ**$^{C}_{A}$-непротиворечивого множества Γ до **НСФ**$^{C}_{A}$-насыщенного множества $\blacktriangle$ доказывается точно так же, как **Лемма 1** предыдущей главы.

Каноническая модель $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$, связанная с произвольным **НСФ**$^{C}_{A}$-насыщенным множеством $\blacktriangle$, задается следующим образом: $\mathbf{D}_{\blacktriangle}$ – множество сингулярных терминов языка, $\varphi_{\blacktriangle}(v) = v$, $\varphi_{\blacktriangle}(S) = \{w: w\mathbf{a}S \in \blacktriangle\}$, где S – произвольная универсалия. Покажем, что модель $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$ действительно обладает всеми свойствами **НСФ**$^{C}_{A}$-моделей. Легко убедиться, что из определения канонической модели следует: $\mathbf{D}_{\blacktriangle} \neq \varnothing$, $\varphi_{\blacktriangle}(v) \in \mathbf{D}_{\blacktriangle}$, $\varphi_{\blacktriangle}(S) \subseteq \mathbf{D}_{\blacktriangle}$. Остается показать, что $\varphi_{\blacktriangle}(\sim S) = \mathbf{D}_{\blacktriangle} \setminus \varphi_{\blacktriangle}(S)$:

> $v \in \varphi_{\blacktriangle}(\sim S)$, е.т.е. $v\mathbf{a}\sim S \in \blacktriangle$ (по определению $\varphi_{\blacktriangle}$), е.т.е. $v\mathbf{e}S \in \blacktriangle$ (в силу $\mathbf{H}^{C}_{A}\mathbf{1}$ и условий (а), (ж), (б) максимального множества), е.т.е. $v\mathbf{a}S \notin \blacktriangle$ (в силу $\mathbf{A}^{C}_{A}\mathbf{5}$ и условий (а), (ж), (б), (в)), е.т.е. $v \in \mathbf{D}_{\blacktriangle} \setminus \varphi_{\blacktriangle}(S)$ (по определению $\varphi_{\blacktriangle}$).

Лемма 2 о том, что истинность формулы в канонической модели $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$ равнозначна ее принадлежности множеству $\blacktriangle$ доказывается точно так же, как и **Лемма 2** предыдущей главы. Отсюда следует семантическая полнота системы **НСФ**$^{C}_{A}$. Итак, обоснована справедливость следующего утверждения:

$$\dot{\forall}\mathbf{A}\ (\mathbf{НСФ}^{C}_{A} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{НСФ}^{C}_{A} \vDash \mathbf{A}).$$

Для доказательства погружаемости системы **НСФ**$^{C}_{A}$ в исчисление предикатов необходимо, как это неоднократно делалось ранее, задать модификацию перевода *, релевантную языку этой силлогистики.

Предварительно задается синтаксическая функция, сопоставляющая каждой универсалии языка **НСФ**$^{C}_{A}$ некоторую последовательность символов языка логики предикатов. Данная функция уже задавалась ранее в §1 Главы VI, в качестве ее знака используем символ подчеркивания.

$\underline{S} = S$ – для простых универсалий,
$\underline{\sim S} = \neg\underline{S}$ – для сложных универсалий.

С использованием введенной синтаксической функции определяем модифицированный перевод * формул языка сингулярной негативной силлогистики аристотелевского типа на язык логики предикатов:

$SaP^* = \forall x(\underline{S}x \supset \underline{P}x)$,	$SeP^* = \forall x(\underline{S}x \supset \neg\underline{P}x)$,
$SiP^* = \exists x(\underline{S}x \;\&\; \underline{P}x)$,	$SoP^* = \exists x(\underline{S}x \;\&\; \neg\underline{P}x)$,
$v\mathbf{a}S^* = \underline{S}v$,	$v\mathbf{e}S^* = \neg\underline{S}v$,
$(\neg\mathbf{A})^* = \neg(\mathbf{A}^*)$,	$(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*$.

Имея целью обоснование погружаемости **НСФ**$^{C}_{A}$ в исчисление предикатов посредством функции * докажем ряд вспомогательных утверждений.

Первое из них состоит в том, что **НСФ**$^{C}_{A}$-общезначимость произвольной силлогистической формулы равносильна универсальной общезначимости в логике предикатов ее *-перевода.

Лемма 3.
Для произвольной модели $\langle \mathbf{D}, \varphi\rangle$, *произвольного объекта* $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$ *и произвольной универсалии* S *имеет место*: $\mathbf{d} \in \varphi(S)$, *е.т.е.* $|\underline{S}x| = \mathbf{1}$ *при приписывании переменной* x *объекта* $\mathbf{d}$.

Если S – простая универсалия, то $\underline{S} = S$ и утверждение леммы очевидно. Если же $S = \sim P$, то приняв индуктивное допущение о справедливости леммы для универсалии P, покажем, что она справедлива и для $\sim P$. Действительно, $\mathbf{d} \in \varphi(\sim P)$, е.т.е. $\mathbf{d} \notin \varphi(P)$ (по определению φ), е.т.е. $|\underline{P}x| = \mathbf{0}$ при приписывании x объекта $\mathbf{d}$ (по индуктивному допущению), е.т.е. $|\neg\underline{P}x| = \mathbf{1}$ при данном приписывании (условия истинности для формулы с главным знаком $\neg$), е.т.е. $|\underline{\sim P}x| = \mathbf{1}$ при данном приписывании (по определению операции «подчеркивания» _).

Аналогичным образом доказывается и другая лемма:

Лемма 4.

Для произвольной модели <**D**, φ>, *произвольного сингулярного термина* v *и произвольной универсалии* S *имеет место*: $\varphi(v) \in \varphi(S)$, *е.т.е.* $|\underline{S}v| = \mathbf{1}$.

Далее индукцией по длине формулы **А** аристотелевского языка сингулярной негативной силлогистики с использованием **Лемм 3** и **4** несложно доказать следующее утверждение:

Лемма 5.

Для любой формулы **А** *и любой модели* <**D**, φ> *верно, что* **А** *истинна в* <**D**, φ>, *е.т.е. ее перевод* **А*** *на язык логики предикатов истинен в* <**D**, φ>.

Из **Леммы 5** непосредственно выводимо

$$\dot{\forall}\mathbf{A}(\mathbf{НСФ}^{C}_{\mathbf{A}} \vDash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{ЛП} \vDash \mathbf{A}^{*}).$$

С использованием последнего утверждения, а также семантической непротиворечивости и полноты как системы $\mathbf{НСФ}^{C}_{\mathbf{A}}$, так и классического исчисления предикатов можно доказать (в том же ключе, как это делалось в §1 Главы III для силлогистики **СФ**) следующую метатеорему:

Метатеорема 1.

*Функция * погружает систему* $\mathbf{НСФ}^{C}_{\mathbf{A}}$ *в* **ИП**.

Таким образом, исчисление $\mathbf{НСФ}^{C}_{\mathbf{A}}$ является адекватной формализацией фундаментальной сингулярной негативной силлогистики в аристотелевском языке.

§ 3. Сингулярная негативная силлогистика Аристотеля и свободная логика

В Главе II отмечалось, что Аристотелем подробно и систематически была построена лишь чистая позитивная силлогистика, не содержащая сингулярных и отрицательных терминов. Однако, в его логических трактатах встречаются многочисленные примеры умозаключений из высказываний, содержащих термины подобных типов. Ряд фрагментов аристотелевских текстов позволяет судить о принимаемой им семантике такого рода высказываний, существуют явные указания на правомерность или неправомерность некоторых форм выводов из них.

Сказанное делает актуальной задачу формальной реконструкции сингулярной негативной силлогистики Аристотеля как полноценной и дедуктивно завершенной логической теории, а также установления ее метатеоретических взаимосвязей с современными логическими системами.

Естественно, что реконструкция указанной логической теории будет осуществляться в том варианте языка сингулярной негативной силлогистики, который мы выше назвали аристотелевским.

Напомним условия истинности и ложности сингулярных высказываний, принимаемые самим Аристотелем в «Органоне»:

$v\mathbf{d}P$ истинно, е.т.е. P присуще v, и v существует;
$v\bar{\mathbf{d}}P$ истинно, е.т.е. P не присуще v, или v не существует;
$v\mathbf{d}{\sim}P$ истинно, е.т.е. P не присуще v, и v существует;
$v\bar{\mathbf{d}}{\sim}P$ истинно, е.т.е. P присуще v, или v не существует.

Из приведенных семантических определений вытекает, что $v\bar{\mathbf{d}}{\sim}P$ выводимо из $v\mathbf{d}P$, а $v\bar{\mathbf{d}}P$ из $v\mathbf{d}{\sim}P$. Обратные же выводимости имеют место только в случае непустоты субъекта v данных высказываний. Сказанное согласуется с отмеченным в Главе II обстоятельством, что сам Стагирит считал правомерными лишь превращения утвердительных высказываний в отрицательные.

К аналогичным следствиям относительно операции превращения для общих и частных высказываний приводит распространение на них аристотелевских условий истинности сингулярных высказываний с пустым субъектом, согласно которым каждое утвердительное высказывание такого рода ложно, а каждое отрицательное истинно.

Подобная трактовка категорических высказываний, как уже говорилось, была характерна для У. Оккама, а аналогичная ей по содержанию интерпретация высказываний чистой позитивной силлогистики в классической логике предикатов – перевод $^{\prime}$, определенный в §4 Главы III, – адекватна системе **С2**.

Возникает вопрос: можно ли обобщить функцию $^{\prime}$, погружающую **С2** в классическое исчисление предикатов, на высказывания с сингулярными и отрицательными терминами так, чтобы при этом воспроизводилась аристотелевская трактовка этих высказываний?

Здесь мы сталкиваемся с серьезной проблемой: перевод сингулярных высказываний, адекватный по смыслу их аристотелевской трактовке, в *классическую* логику предикатов невозможен, поскольку в последней принимается допущение о непустоте любого сингулярного термина. Поэтому экспликацию таких высказываний следует осуществлять в рамках *логики, свободной от экзистенциальных предпосылок*. В.И. Маркиным [37] была построена система сингулярной негативной силлогистики, являющаяся силлогистическим фрагментом некоторого варианта свободной логики, и доказана погружаемость данной силлогистики в свободную логику посредством перевода, выражающего аристотелевскую трактовку категорических высказываний.

Приведем формулировку подходящего для решения данной задачи варианта свободной логики **FL**. Язык **FL** содержит бесконечные списки предметных переменных и констант, унарных предикаторных символов, выделенный предикатор существования «E», пропозициональные связки, кванторы и скобки. Определение формулы обычное.

Моделью $\mathbf{M}_{\mathbf{FL}}$ назовем тройку <**U**, **D**, **I**>, где $\mathbf{U} \neq \varnothing$, $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{U}$, $\mathbf{I}(v) \in \mathbf{U}$, $\mathbf{I}(S) \subseteq \mathbf{U}$, $\mathbf{I}(E) = \mathbf{D}$. С содержательной точки зрения **U** представляет собой универсум возможных объектов, **D** – множество актуальных индивидов, **I** – функцию, которая сопоставляет значения нелогическим константам языка, причем предикатору существования она соотносит множество актуальных объектов **D**. Пусть функция g приписывает в качестве значений любой предметной переменной α индивид из **U**: $g(\alpha) \in \mathbf{U}$.

Определим понятие «значение формулы (**1** или **0**) в модели $\mathbf{M}_{\mathbf{FL}}$ при приписывании g».

FL1. $|\Pi(\alpha)|_g = \mathbf{1}$, е.т.е. $g(\alpha) \in \mathbf{I}(\Pi)$;
FL2. $|\Pi(v)|_g = \mathbf{1}$, е.т.е. $\mathbf{I}(v) \in \mathbf{I}(\Pi)$,

где Π – любой предикаторный символ, включая E;

FL3–FL7. Стандартные условия истинности формул видов $\neg\mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \supset \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \equiv \mathbf{B})$;

FL8. $|\forall\alpha\mathbf{A}|_g = \mathbf{1}$, е.т.е. $\dot\forall g'((g' =_\alpha g \;\dot{\&}\; g'(\alpha) \in \mathbf{D}) \;\dot\supset\; |\mathbf{A}|_{g'} = \mathbf{1})$;
FL9. $|\exists\alpha\mathbf{A}|_g = \mathbf{1}$, е.т.е. $\dot\exists g'((g' =_\alpha g \;\dot{\&}\; g'(\alpha) \in \mathbf{D}) \;\dot{\&}\; |\mathbf{A}|_{g'} = \mathbf{1})$,

где $g' =_\alpha g$ означает, что g' отличается от g не более, чем приписыванием значения для α.

Формула **A** *истинна в модели* $\mathbf{M}_{\mathbf{FL}}$, е.т.е. $\dot\forall g|\mathbf{A}|_g = \mathbf{1}$. Формула называется **FL**-*общезначимой*, е.т.е. она истинна в каждой модели $\mathbf{M}_{\mathbf{FL}}$.

Далее в соответствии с аристотелевской трактовкой категорических высказываний осуществим перевод формул языка сингулярной негативной силлогистики аристотелевского типа в язык предложенной свободной логики.

Как и в предыдущем параграфе задаем сначала синтаксическую функцию (используя для нее символ подчеркивания), сопоставляющую каждой универсалии силлогистического языка некоторую последовательность символов из алфавита **FL**:

$\underline{S} = S$ – для простых универсалий,
$\underline{\sim S} = \neg\underline{S}$ – для сложных универсалий.

Определяем переводящую операцию * из языка сингулярной позитивной силлогистики аристотелевского типа в язык **FL**:

$(SaP)^* = \forall x(\underline{S}x \supset \underline{P}x) \,\&\, \exists x\underline{S}x$, $\quad (SeP)^* = \forall x(\underline{S}x \supset \neg\underline{P}x)$,
$(SiP)^* = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \underline{P}x)$, $\quad (SoP)^* = \exists x(\underline{S}x \,\&\, \neg\underline{P}x)) \vee \neg\exists x\underline{S}x$,
$(v\grave{a}S)^* = \underline{S}v \,\&\, Ev$, $\quad (v\grave{e}S)^* = \neg\underline{S}v \vee \neg Ev$,
$(\neg\mathbf{A})^* = \neg(\mathbf{A}^*)$, $\quad (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*$.

Этот перевод адекватно эксплицирует в терминах неэкзистенциальной логики имевшуюся у Аристотеля трактовку высказываний с сингулярными и отрицательными терминами, естественным образом распространенную также на общие и частные высказывания. Поэтому формальной реконструкцией сингулярной негативной силлогистики Аристотеля может считаться то силлогистическое исчисление, которое погружается в свободную логику **FL** переводом *. Такой системой является исчисление **CA**, предложенное В.И. Маркиным [37].

Аксиомами **CA** являются формулы следующих типов:

CA0. Аксиомы классического исчисления высказываний.
CA1. $(SaP \,\&\, v\grave{a}S) \supset v\grave{a}P$,
CA2. $(v\grave{a}P \,\&\, v\grave{a}S) \supset SiP$,
CA3. $SaP \supset SiS$,
CA4. $SeP \equiv \neg SiP$,
CA5. $SoP \equiv \neg SaP$,
CA6. $v\grave{e}S \equiv \neg v\grave{a}S$,
CA7. $(SoP \,\&\, SiS) \supset Si{\sim}P$,
CA8. $v\grave{a}S \supset v\grave{e}{\sim}S$,
CA9. $v\grave{a}S \supset (v\grave{a}P \vee v\grave{a}{\sim}P)$.

Правилами вывода в системе **CA** являются:

R1. – *modus ponens*

R2. $\dfrac{\vdash (v\grave{a}S \,\&\, v\grave{a}P) \supset \mathbf{A}}{\vdash SiP \supset \mathbf{A},}$ где v не содержится в **A**.

Дадим некоторые пояснения относительно дедуктивных постулатов исчисления **CA**. Формализация сингулярной негативной силлогистики Аристотеля осуществляется на основе классического исчисления высказываний, т.е. в том же стиле, что и аналогичная работа по реконструкции чистых позитивных силлогистик, проделанная Я. Лукасевичем, В.А.Смирновым и другими исследователями.

Аксиомы **CA1** и **CA2** являются аналогами естественных модусов категорического силлогизма, конкретные примеры которых можно встретить и в текстах самого Аристотеля.

Аксиома **CA3** содержит информацию о непустоте субъекта в истинных высказываниях вида SaP (перевод SiS эквивалентен в **FL** формуле $\exists x\underline{S}x$), что согласуется с трактовкой утвердительных высказываний по Аристотелю–Оккаму.

Аксиомы **CA4** и **CA5** выражают известные законы диагоналей логического квадрата, а **CA6** – аристотелевское утверждение о том, что высказывания типов vaS и veS противоречат друг другу.

Аксиомы **CA7** и **CA8** являются формальной экспликацией принципов превращения в редакции Аристотеля. Согласно **CA8**, превращение утвердительного высказывания в отрицательное осуществляется без каких-либо ограничений. А содержательный смысл **CA7**, с учетом перевода * в свободную логику, состоит в том, что превращение отрицательного высказывания в утвердительное правомерно только в случае непустоты его субъекта.

Смысл аксиомы **CA9** становится понятным, если проанализировать перевод ее консеквента в свободную логику: $(vaP \vee va{\sim}P)^* = (\underline{P}v \;\&\; Ev) \vee (\neg\underline{P}v \;\&\; Ev)$, что равносильно в **FL** формуле Ev. Таким образом, **CA9** в полном соответствии с позицией Аристотеля утверждает, что субъект истинного высказывания вида vaS всегда непуст.

Правило вывода **R2** представляет собой формализацию одного из вариантов *метода экфетического доказательства*. Подобные способы рассуждения использовались Аристотелем, правда, при построении модальной силлогистики.

Система **CA** является расширением сингулярной позитивной силлогистики $\mathbf{C2}^C{}_A$, сформулированной в §1 Главы VII. Действительно, схемы **CA0-CA6** полностью охватывают все множество аксиом системы $\mathbf{C2}^C{}_A$, **R1** и **R2** являются правилами вывода также и в $\mathbf{C2}^C{}_A$. В последней системе имеется еще одно правило:

R3: $\dfrac{\vdash (vaS \;\&\; veP) \supset \mathbf{A}}{\vdash (SoP \;\&\; SiS) \supset \mathbf{A},}$ где v не содержится в **A**.

Остается показать его производность в системе **CA**:

1.	**CA**$\vdash (vaS \;\&\; veP) \supset \mathbf{A}$	допущение
2.	**CA**$\vdash vaP \supset ve{\sim}P$	**CA8**

3.	**CA**$\vdash \neg ve{\sim}P \supset \neg vaP$	2; **ЛВ**
4.	**CA**$\vdash veP \equiv \neg vaP$	**CA6**
5.	**CA**$\vdash ve{\sim}P \equiv \neg va{\sim}P$	**CA6**
6.	**CA**$\vdash va{\sim}P \supset veP$	3, 4, 5; **ЛВ**
7.	**CA**$\vdash (vaS \;\&\; va{\sim}P) \supset \mathbf{A}$	1, 6; **ЛВ**
8.	**CA**$\vdash Si{\sim}P \supset \mathbf{A}$	7; **R2**
9.	**CA**$\vdash (SoP \;\&\; SiS) \supset Si{\sim}P$	**CA7**
10.	**CA**$\vdash (SoP \;\&\; SiS) \supset \mathbf{A}$	8, 9; **ЛВ**

В §1 Главы VII было показано, что исчисление $\mathbf{C2}^C{}_A$, в свою очередь, содержит все теоремы чистой позитивной силлогистики **C2** В.А. Смирнова. Следовательно, аристотелевская сингулярная негативная силлогистика **CA** является расширением системы **C2**.

В исчислении **CA**, так же как и в рассмотренной в предыдущем параграфе сингулярной негативной силлогистике $\mathbf{НСФ}^C{}_A$, доказуемы законы введения и удаления двойного терминного отрицания. Однако эти доказательства в **CA** являются более изощренными.

T6. $vaS \equiv va{\sim}{\sim}S$.

1.	$vaS \supset ve{\sim}S$	**CA8**
2.	$ve{\sim}S \equiv \neg va{\sim}S$	**CA6**
3.	$vaS \supset \neg va{\sim}S$	1, 2; **ЛВ**
4.	$vaS \supset (va{\sim}S \vee va{\sim}{\sim}S)$	**CA9**
5.	$vaS \supset va{\sim}{\sim}S$	3, 4; **ЛВ**
6.	$va{\sim}S \supset ve{\sim}{\sim}S$	**CA8**
7.	$ve{\sim}{\sim}S \equiv \neg va{\sim}{\sim}S$	**CA6**
8.	$va{\sim}{\sim}S \supset \neg va{\sim}S$	6, 7; **ЛВ**
9.	$va{\sim}{\sim}S \supset (vaS \vee va{\sim}S)$	**CA9**
10.	$va{\sim}{\sim}S \supset vaS$	8, 9; **ЛВ**
11	$vaS \equiv va{\sim}{\sim}S$	5, 10; **ЛВ**

T7. $veS \equiv ve{\sim}{\sim}S$.
Выводится из **T6** с использованием **CA6**.

T8. $SiP \equiv Si{\sim}{\sim}P$.

1.	$(vaP \;\&\; vaS) \supset SiP$	**CA2**
2.	$vaP \equiv va{\sim}{\sim}P$	**T6**
3.	$(vaS \;\&\; va{\sim}{\sim}P) \supset SiP$	1, 2; **ЛВ**
4.	$Si{\sim}{\sim}P \supset SiP$	3; **R2**
5.	$(va{\sim}{\sim}P \;\&\; vaS) \supset Si{\sim}{\sim}P$	**CA2**

6.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{a}P) \supset Si{\sim}{\sim}P$	2, 5; **ЛВ**
7.	$SiP \supset Si{\sim}{\sim}P$	6; **R2**
8.	$SiP \equiv Si{\sim}{\sim}P$	4, 7; **ЛВ**

T9. $SiP \equiv {\sim}{\sim}SiP$.

Доказывается аналогично **T8**.

T10. $SeP \equiv Se{\sim}{\sim}P$.

T11. $SeP \equiv {\sim}{\sim}SeP$.

Выводятся из **T8** и **T9** с использованием **CA4**.

T12. $SaP \equiv Sa{\sim}{\sim}P$.

1.	$(Sa{\sim}{\sim}P \,\&\, v\bar{a}S) \supset v\bar{a}{\sim}{\sim}P$	**CA1**
2.	$(v\bar{a}S \,\&\, \neg v\bar{a}{\sim}{\sim}P) \supset \neg Sa{\sim}{\sim}P$	1; **ЛВ**
3.	$v\bar{a}P \equiv v\bar{a}{\sim}{\sim}P$	**T6**
4.	$v\bar{e}P \equiv \neg v\bar{a}P$	**CA6**
5.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{e}P) \supset \neg Sa{\sim}{\sim}P$	2, 3, 4; **ЛВ**
6.	$(SoP \,\&\, SiS) \supset \neg Sa{\sim}{\sim}P$	5; **R3**' (производно в **CA**)
7.	$(Sa{\sim}{\sim}P \,\&\, SiS) \supset \neg SoP$	6; **ЛВ**
8.	$SoP \equiv \neg SaP$	**CA5**
9.	$Sa{\sim}{\sim}P \supset SiS$	**CA3**
10.	$Sa{\sim}{\sim}P \supset SaP$	7, 8, 9; **ЛВ**
11.	$(SaP \,\&\, v\bar{a}S) \supset v\bar{a}P$	**CA1**
12.	$v\bar{e}{\sim}{\sim}P \equiv \neg v\bar{a}{\sim}{\sim}P$	**CA6**
13.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{e}{\sim}{\sim}P) \supset \neg SaP$	3, 11, 12; **ЛВ**
14.	$(So{\sim}{\sim}P \,\&\, SiS) \supset \neg SaP$	13; **R3**'
15.	$(SaP \,\&\, SiS) \supset \neg So{\sim}{\sim}P$	8, 14; **ЛВ**
16.	$So{\sim}{\sim}P \equiv \neg Sa{\sim}{\sim}P$	**CA5**
17.	$SaP \supset SiS$	**CA3**
18.	$SaP \supset Sa{\sim}{\sim}P$	15, 16, 17; **ЛВ**
19.	$SaP \equiv Sa{\sim}{\sim}P$	10, 18; **ЛВ**

T13. $SaP \equiv {\sim}{\sim}SaP$.

Доказывается аналогично **T12**.

T14. $SoP \equiv So{\sim}{\sim}P$.

T15. $SoP \equiv {\sim}{\sim}SoP$.

Выводятся из **T12** и **T13** с использованием **CA5**.

Остановимся подробнее на вопросе о том, в каком виде законы превращения имеют место в силлогистике **CA**. В этой системе недоказуемы теоремы **T1-T5** системы **НСФ**$^{C}_{A}$ фундаментальной сингулярной негативной силлогистики, которые выражают возможность неограниченного применения принципов обращения для любых атрибутивных высказываний.

В исчислении **CA**, как и у самого Аристотеля, допускается неограниченное превращение лишь для утвердительных высказываний: $SaP \supset Se{\sim}P$, $SiP \supset So{\sim}P$, $v\bar{a}S \supset v\bar{e}{\sim}S$. Превращение отрицательного высказывания оказывается корректным только при явном добавлении посылки, содержащей информацию о непустоте его субъекта: $(SeP \,\&\, SiS) \supset Sa{\sim}P$, $(SoP \,\&\, SiS) \supset Si{\sim}P$, $(v\bar{e}S \,\&\, (v\bar{a}P \vee v\bar{a}{\sim}P)) \supset v\bar{a}{\sim}S$. Докажем в системе **CA** принципы превращения в указанной редакции.

Формулы $(SoP \,\&\, SiS) \supset Si{\sim}P$ и $v\bar{a}S \supset v\bar{e}{\sim}S$ – аксиомы **CA**.

T16. $SaP \supset Se{\sim}P$.

1.	$(Sa{\sim}{\sim}P \,\&\, v\bar{a}S) \supset v\bar{a}{\sim}{\sim}P$	**CA1**
2.	$(v\bar{a}S \,\&\, \neg v\bar{a}{\sim}{\sim}P) \supset \neg Sa{\sim}{\sim}P$	1; **ЛВ**
3.	$v\bar{e}{\sim}{\sim}P \equiv \neg v\bar{a}{\sim}{\sim}P$	**CA6**
4.	$v\bar{a}{\sim}P \supset v\bar{e}{\sim}{\sim}P$	**CA8**
5.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{a}{\sim}P) \supset \neg Sa{\sim}{\sim}P$	2, 3, 4; **ЛВ**
6.	$Si{\sim}P \supset \neg Sa{\sim}{\sim}P$	5; **R2**
7.	$Se{\sim}P \equiv \neg Si{\sim}P$	**CA4**
8.	$Sa{\sim}{\sim}P \supset Se{\sim}P$	6, 7; **ЛВ**
9.	$SaP \equiv Sa{\sim}{\sim}P$	**T12**
10.	$SaP \supset Se{\sim}P$	8, 9; **ЛВ**

T17. $SiP \supset So{\sim}P$.

1.	$(Sa{\sim}P \,\&\, v\bar{a}S) \supset v\bar{a}{\sim}P$	**CA1**
2.	$(v\bar{a}S \,\&\, \neg v\bar{a}{\sim}P) \supset \neg Sa{\sim}P$	1; **ЛВ**
3.	$v\bar{e}{\sim}P \equiv \neg v\bar{a}{\sim}P$	**CA6**
4.	$So{\sim}P \equiv \neg Sa{\sim}P$	**CA5**
5.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{e}{\sim}P) \supset So{\sim}P$	2, 3, 4; **ЛВ**
6.	$v\bar{a}P \supset v\bar{e}{\sim}P$	**CA8**
7.	$(v\bar{a}S \,\&\, v\bar{a}P) \supset So{\sim}P$	5, 6; **ЛВ**
8.	$SiP \supset So{\sim}P$	7; **R2**

T18. $(SeP \,\&\, SiS) \supset Sa{\sim}P$.

1.	$(So{\sim}P \,\&\, SiS) \supset Si{\sim}{\sim}P$	**CA7**
2.	$So{\sim}P \equiv \neg Sa{\sim}P$	**CA5**
3.	$Se{\sim}{\sim}P \equiv \neg Si{\sim}{\sim}P$	**CA4**

4.	$(Se{\sim}{\sim}P \;\&\; SiS) \supset Sa{\sim}P$	1, 2, 3; **ЛВ**
5.	$SeP \equiv Se{\sim}{\sim}P$	**Т10**
6.	$(SeP \;\&\; SiS) \supset Sa{\sim}P$	4, 5; **ЛВ**

Т19. $(v\bar{e}S \;\&\; (v\bar{a}P \vee v\bar{a}{\sim}P)) \supset v\bar{a}{\sim}S$.

1.	$v\bar{a}P \supset (v\bar{a}S \vee v\bar{a}{\sim}S)$	**СА9**
2.	$v\bar{a}{\sim}P \supset (v\bar{a}S \vee v\bar{a}{\sim}S)$	**СА9**
3.	$(v\bar{a}P \vee v\bar{a}{\sim}P) \supset (v\bar{a}S \vee v\bar{a}{\sim}S)$	1, 2; **ЛВ**
4.	$v\bar{e}S \equiv \neg v\bar{a}S$	**СА6**
5.	$(v\bar{e}S \;\&\; (v\bar{a}P \vee v\bar{a}{\sim}P)) \supset v\bar{a}{\sim}S$	3, 4; **ЛВ**

Последующая часть параграфа будет посвящена доказательству погружаемости силлогистического исчисления **СА** в свободную логику **FL** посредством перевода *. Опишем предварительно общую схему дальнейших рассуждений.

Сначала строится формальная семантика языка сингулярной негативной силлогистики. Доказывается непротиворечивость (**Метатеорема 2**) и полнота (**Метатеорема 3**) исчисления **СА** относительно этой семантики. Далее с использованием **Метатеорем 4** и **5**, носящих вспомогательный характер, показывается, что общезначимость произвольной силлогистической формулы равносильна в свободной логике **FL** общезначимости ее *-перевода (**Метатеорема 6**). В качестве следствия **Метатеорем 2**, **3** и **6** несложно получить утверждение о том, что операция * погружает систему **СА** в **FL** (**Метатеорема 7**).

Сформулируем семантику языка сингулярной негативной силлогистики. *Модель* $\mathbf{M_{CA}}$ представляет собой тройку <**U**, **D**, φ>, где $\mathbf{U} \neq \varnothing$, $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{U}$, φ приписывает значения сингулярным терминам и простым универсалиям языка: $\varphi(v) \in \mathbf{U}$, $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$. Зададим также функцию υ, сопоставляющую в модели <**U**, **D**, φ> значение произвольной универсалии: если S – простая универсалия, то $\upsilon(S) = \varphi(S)$, $\upsilon({\sim}P) = \mathbf{D} \setminus \upsilon(P)$. Отсюда вытекает, что $\upsilon({\sim}{\sim}P) = \upsilon(P)$.

Определим понятие «значение силлогистической формулы (**1** или **0**) в модели $\mathbf{M_{CA}}$»:

ИА1. $|v\bar{a}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(v) \in \upsilon(P)$;

ИА2. $|v\bar{e}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(v) \notin \upsilon(P)$;

ИА3. $|SaP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\upsilon(S) \subseteq \upsilon(P) \;\dot{\&}\; \upsilon(S) \neq \varnothing$;

ИА4. $|SiP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\upsilon(S) \cap \upsilon(P) \neq \varnothing$;

ИА5. $|SeP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\upsilon(S) \cap \upsilon(P) = \varnothing$;

ИА6. $|SoP|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\upsilon(S) \setminus \upsilon(P) \neq \varnothing \;\dot{\vee}\; \upsilon(S) = \varnothing$;

ИА7–ИА11. Стандартные условия истинности формул видов $\neg\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \;\&\; \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$.

Формула **A** *истинна (значима) в модели* $\mathbf{M_{CA}}$, е.т.е. $\dot{\forall}\varphi\; |\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1}$. Формула называется **СА**-*общезначимой*, е.т.е. она истинна в каждой модели $\mathbf{M_{CA}}$.

Докажем *семантическую непротиворечивость* исчисления **СА**.

Метатеорема 2.
Всякая теорема системы **СА** *является* **СА**-*общезначимой формулой.*

Нетрудно убедиться в том, что каждая аксиома исчисления **СА** истинна в каждой модели $\mathbf{M_{CA}}$, а правило **R1** – *modus ponens* – инвариантно относительно **СА**-общезначимости. Остается показать, что правило **R2** сохраняет свойство «быть **СА**-общезначимой формулой».

Предположим, что посылка этого правила $(v\bar{a}S \;\&\; v\bar{a}P) \supset \mathbf{A}$, где v не содержится в **A**, **СА**-общезначима, а его заключение $SiP \supset \mathbf{A}$ – нет. Тогда существует модель <**U**, **D**, φ>, в которой последняя формула ложна, значит $|SiP|_\varphi = \mathbf{1}$, а $|\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{0}$ в этой модели. Рассмотрим модель <**U**, **D**, φ'>, где φ' может отличаться от φ только значением сингулярного термина v, которому φ' приписывает произвольный элемент из $\upsilon(S) \cap \upsilon(P)$. Такой объект всегда существует в силу истинности SiP и **ИА4**. Очевидно, что в новой модели формула $v\bar{a}S \;\&\; v\bar{a}P$ окажется истинной (в силу **ИА1**), а формула **A** сохранит свое прежнее значение **0**, поскольку она не содержит термина v. Значит, $|(v\bar{a}S \;\&\; v\bar{a}P) \supset \mathbf{A}| = \mathbf{0}$ в модели <**U**, **D**, φ'>, что противоречит допущению об общезначимости этой формулы. Таким образом, инвариантность **R2** относительно **СА**-общезначимости, а вместе с ней и **Метатеорема 2** *доказаны*.

Семантическую полноту исчисления **СА** доказываем методом Хенкина. Как и ранее, назовем множество формул $\mathbf{\Gamma}$ языка сингулярной негативной силлогистики **СА**-*непротиворечивым*, е.т.е. в нем не найдется таких формул $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,..., $\mathbf{F}_k$, что формула $\neg(\mathbf{F}_1 \;\&\; \mathbf{F}_2 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathbf{F}_k)$ была бы теоремой **СА**. Назовем **СА**-непротиворечивое множество формул $\mathbf{\Delta}$ **СА**-*максимальным*, е.т.е. $\dot{\forall}\mathbf{A}\; (\mathbf{A} \in \mathbf{\Delta} \;\dot{\vee}\; \neg\mathbf{A} \in \mathbf{\Delta})$. **СА**-максимальные множества имеют свойства (а)-(ж) (см. § 1 Главы III).

СА-непротиворечивое максимальное множество формул $\mathbf{\Delta}$ назовем **СА**-*насыщенным*, е.т.е. для любых универсалий S и P выполняется следующее условие:

$$SiP \in \mathbf{\Delta} \;\dot{\supset}\; \dot{\exists}v(v\bar{a}S \;\&\; v\bar{a}P \in \mathbf{\Delta}).$$

Лемма 6.

Произвольное **СА**-*непротиворечивое множество* $\mathbf{\Gamma}$, *в формулах которого не содержится бесконечное число сингулярных терминов, можно расширить до насыщенного множества* Δ.

Пусть $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$,... – пересчет всех формул силлогистического языка. Строим последовательность множеств Δ_1, Δ_2,... следующим образом. Δ_1 есть $\mathbf{\Gamma}$. Если $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **СА**-противоречиво, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\mathbf{C}_n\}$. Если $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **СА**-непротиворечиво и $\mathbf{C}_n$ не имеет вида SiP, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$, а когда $\mathbf{C}_n = SiP$, то $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n, vaS \ \& \ vaP\}$, причем сингулярный термин v не содержится ни в $\mathbf{C}_n$, ни в формулах из Δ_n.

Пусть Δ есть результат объединения всех множеств последовательности Δ_1, Δ_2,... Очевидно по построению, что множество Δ удовлетворяет условиям максимальности и насыщенности. Остается продемонстрировать его непротиворечивость. Для этого достаточно доказать, что каждое Δ_i **СА**-непротиворечиво.

Δ_1, т.е. $\mathbf{\Gamma}$ непротиворечиво по условию леммы. Предположим, что произвольное Δ_n непротиворечиво. В случаях, когда $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **СА**-противоречиво, а также когда оно непротиворечиво и $\mathbf{C}_n$ не имеет вида SiP, непротиворечивость Δ_{n+1} очевидна. Рассмотрим случай, когда $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ непротиворечиво и $\mathbf{C}_n = SiP$. Допустим, что Δ_{n+1}, т.е. $\Delta_n \cup \{SiP, vaS \ \& \ vaP\}$, **СА**-противоречиво. Тогда в этом множестве найдутся такие формулы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2,..., \mathbf{F}_k$, что $\neg(\mathbf{F}_1 \ \& \ \mathbf{F}_2 \ \& \ ... \ \& \ \mathbf{F}_k \ \& \ SiP \ \& \ vaS \ \& \ vaP)$ суть теорема **СА**. По законам логики высказываний отсюда вытекает, что теоремой этой системы является также $(vaS \ \& \ vaP) \supset \neg(\mathbf{F}_1 \ \& \ \mathbf{F}_2 \ \& \ ... \ \& \ \mathbf{F}_k \ \& \ SiP)$. Далее по правилу **R2** получаем: $SiP \supset \neg(\mathbf{F}_1 \ \& \ \mathbf{F}_2 \ \& \ ... \ \& \ \mathbf{F}_k \ \& \ SiP)$, значит, в **СА** доказуема формула $\neg(\mathbf{F}_1 \ \& \ \mathbf{F}_2 \ \& \ ... \ \& \ \mathbf{F}_k \ \& \ SiP)$. Отсюда следует, что множество $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **СА**-противоречиво, что противоречит условию рассматриваемого случая. Таким образом, методом математической индукции доказана **СА**-непротиворечивость каждого Δ_i, а значит и непротиворечивость Δ. **Лемма 6** *доказана*.

С каждым насыщенным множеством Δ свяжем *каноническую модель* $<\mathbf{U}_\Delta, \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$, где $\mathbf{U}_\Delta$ – множество сингулярных терминов языка, $\mathbf{D}_\Delta = \{w: \forall Q(waQ \lor wa{\sim}Q \in \Delta)\}$, $\varphi_\Delta(v) = v$, $\varphi_\Delta(S) = \{w: waS \in \Delta\}$, где S – простая универсалия.

Покажем, что каноническая модель является $\mathbf{M}_{CA}$-моделью. Из определений $\mathbf{U}_\Delta$, $\mathbf{D}_\Delta$ и φ_Δ вытекает, что $\mathbf{U}_\Delta \neq \varnothing$, $\mathbf{D}_\Delta \subseteq \mathbf{U}_\Delta$ и $\varphi_\Delta(v) \in \mathbf{U}_\Delta$. Остается доказать, что $\varphi_\Delta(S) \subseteq \mathbf{D}_\Delta$. Рассмотрим произвольный сингулярный термин $v \in \varphi_\Delta(S)$. По определению φ_Δ, $vaS \in \Delta$. В силу наличия

в системе **СА** аксиом вида $vaS \supset (vaQ \lor va{\sim}Q)$, а также свойств максимального множества Δ, имеем: $(vaQ \lor va{\sim}Q) \in \Delta$ для произвольной универсалии Q, а это, согласно определению $\mathbf{D}_\Delta$, означает, что v является элементом $\mathbf{D}_\Delta$.

Рассмотрим связанную с канонической моделью $<\mathbf{U}_\Delta, \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$ функцию υ_Δ. Индукцией по числу символов ~, содержащихся в составе произвольной универсалии Q, покажем, что $\upsilon_\Delta(Q) = \{w: waQ \in \Delta\}$.

В случае, когда Q не содержит терминных отрицаний, т.е. когда Q есть простая универсалия (базис индукции), имеем: $\upsilon_\Delta(Q) = \varphi_\Delta(Q) = \{w: waQ \in \Delta\}$. Доказывая индуктивный переход, положим, что Q имеет вид $\sim S$. Продемонстрируем сначала справедливость для любого сингулярного термина следующего утверждения: $v \in \upsilon_\Delta(\sim S) \dot{\supset} va{\sim}S \in \Delta$.

1.	$v \in \upsilon_\Delta(\sim S)$	допущение
2.	$v \in \mathbf{D}_\Delta \setminus \upsilon_\Delta(S)$	1; опр. υ
3.	$\forall P(vaP \lor va{\sim}P \in \Delta) \ \& \ vaS \notin \Delta$	2; опр. $\mathbf{D}_\Delta$, инд. доп.
4.	$vaS \lor va{\sim}S \in \Delta \ \& \ vaS \notin \Delta$	3; $\forall_{\text{И}}$
5.	$va{\sim}S \in \Delta$	4; св-во (д) максимального мн-ва

Докажем обратное утверждение.

1.	$va{\sim}S \in \Delta$	допущение
2.	$va{\sim}S \supset vaS \in \Delta$	**СА8**; (а)
3.	$vaS \equiv \neg vaS \in \Delta$	**СА6**; (а)
4.	$vaS \notin \Delta$	1, 2, 3; (б), (ж)
5.	$va{\sim}S \supset (vaP \lor va{\sim}P) \in \Delta$	**СА9**; (а)
6.	$(vaP \lor va{\sim}P) \in \Delta$	1, 5; (б)
7.	$\forall P(vaP \lor va{\sim}P) \in \Delta$	6; $\forall$в
8.	$v \in \mathbf{D}_\Delta \setminus \upsilon_\Delta(S)$	7, 4; опр. $\mathbf{D}_\Delta$
9.	$v \in \upsilon_\Delta(\sim S)$	8; опр. υ

Докажем теперь лемму о равносильности принадлежности произвольной формулы некоторому насыщенному множеству и ее истинности в соответствующей канонической модели:

Лемма 7.

Для произвольного насыщенного множества Δ *и произвольной силлогистической формулы* $\mathbf{A}$ *верно, что* $|\mathbf{A}| = 1$ *в модели* $<\mathbf{U}_\Delta, \mathbf{D}_\Delta, \varphi_\Delta>$, *е.т.е.* $\mathbf{A} \in \Delta$.

Доказательство ведется индукцией по числу логических связок в формуле **A**. Базис индукции включает шесть случаев.

I. A $= v\grave{a}S$.

$|v\grave{a}S|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi_\blacktriangle(v) \in \upsilon_\blacktriangle(S)$ (в силу **ИА1**), е.т.е. $v \in \{w: w\grave{a}S \in \blacktriangle\}$ (определение $\varphi_\blacktriangle$, свойство $\upsilon_\blacktriangle$), е.т.е. $v\grave{a}S \in \blacktriangle$.

II. A $= SaP$.

Докажем сначала, что $|SaP|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; SaP \in \blacktriangle$.

1.	$\vert SaP\vert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\upsilon_\blacktriangle(S) \subseteq \upsilon_\blacktriangle(P)$	1; **ИА3**
3.	$\upsilon_\blacktriangle(S) \neq \varnothing$	1; **ИА3**
4.	$\dot{\exists} v(v\grave{a}S \in \blacktriangle)$	3; свойство $\upsilon_\blacktriangle$
5.	$v\grave{a}S \in \blacktriangle$	4; $\dot{\exists}_{\text{и}}$
6.	$(v\grave{a}S \;\&\; v\grave{a}S) \supset SiS \in \blacktriangle$	**СА2**; (а)
7.	$SiS \in \blacktriangle$	5, 6; (г), (б)
8.	$SaP \notin \blacktriangle$	допущение
9.	$SoP \equiv \neg SaP \in \blacktriangle$	**СА4**; (а)
10.	$SoP \in \blacktriangle$	8, 9; (в), (ж)
11.	$SoP \;\&\; SiS \in \blacktriangle$	7, 10; (г)
12.	$(SoP \;\&\; SiS) \supset Si{\sim}P \in \blacktriangle$	**СА9**; (а)
13.	$Si{\sim}P \in \blacktriangle$	11, 12; (б)
14.	$\dot{\exists} v(v\grave{a}S \;\&\; v\grave{a}{\sim}P \in \blacktriangle)$	13; насыщенность $\blacktriangle$
15.	$\upsilon_\blacktriangle(S) \cap \upsilon_\blacktriangle({\sim}P) \neq \varnothing$	14; свойство $\upsilon_\blacktriangle$
16.	$\upsilon_\blacktriangle(S) \cap (\mathbf{D} \setminus \upsilon_\blacktriangle(P)) \neq \varnothing$	15; определение $\upsilon_\blacktriangle$
17.	Неверно, что $\upsilon_\blacktriangle(S) \subseteq \upsilon_\blacktriangle(P)$	16
18.	$SaP \in \blacktriangle$	2, 17; от противного

Докажем обратное утверждение.

1.	$SaP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$SaP \supset SiS \in \blacktriangle$	**СА6**; (а)
3.	$SiS \in \blacktriangle$	1, 2; (б)
4.	$\dot{\exists} v(v\grave{a}S \in \blacktriangle)$	3; насыщенность $\blacktriangle$
5.	$\upsilon_\blacktriangle(S) \neq \varnothing$	4; свойство $\upsilon_\blacktriangle$
6.	$v\grave{a}S \in \blacktriangle$	допущение
7.	$(SaP \;\&\; v\grave{a}S) \supset v\grave{a}P \in \blacktriangle$	**СА1**; (а)
8.	$v\grave{a}P \in \blacktriangle$	1, 6, 7; (г), (б)
9.	$\dot{\forall} v(v\grave{a}S \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; v\grave{a}P \in \blacktriangle)$	$\dot{\supset}$ в, $\dot{\forall}$ в
10.	$\upsilon_\blacktriangle(S) \subseteq \upsilon_\blacktriangle(P)$	определение $\subseteq$, свойство $\upsilon_\blacktriangle$
11.	$\vert SaP\vert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	10, 5; **ИА3**

III. A $= SiP$.

Докажем сначала, что $|SiP|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; SiP \in \blacktriangle$.

1.	$\vert SiP\vert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\upsilon_\blacktriangle(S) \cap \upsilon_\blacktriangle(P) \neq \varnothing$	1; **ИА4**
3.	$\dot{\exists} v(v\grave{a}S \;\&\; v\grave{a}P \in \blacktriangle)$	2; свойство $\upsilon_\blacktriangle$
4.	$(v\grave{a}P \;\&\; v\grave{a}S) \supset SiP \in \blacktriangle$	**СА2**; (а)
5.	$SiP \in \blacktriangle$	3, 4; (б)

Докажем обратное утверждение.

1.	$SiP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$\dot{\exists} v(v\grave{a}S \;\&\; v\grave{a}P \in \blacktriangle)$	1; насыщенность $\blacktriangle$
3.	$\upsilon_\blacktriangle(S) \cap \upsilon_\blacktriangle(P) \neq \varnothing$	2; свойство $\upsilon_\blacktriangle$
4.	$\vert SiP\vert_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	3; **ИА4**

IV. A $= v\grave{e}P$. **V. A** $= SeP$. **VI. A** $= SoP$.

Эти случаи сводятся, соответственно, к случаям (**I**), (**III**) и (**II**) в силу наличия в силлогистическом исчислении аксиом **СА5**, **СА3** и **СА4**, а также в силу условий истинности **ИА2**, **ИА5**, **ИА6**. Доказательство индуктивного перехода тривиально. **Лемма 7** *доказана*.

Стандартно обосновываем *семантическую полноту* системы **СА**.

Метатеорема 3.
Всякая **СА**-*общезначимая формула является теоремой исчисления* **СА**.

Допустим, что некоторая **СА**-общезначимая формула **B** недоказуема в системе **СА**. Это означает, что в данном исчислении формула $\neg\neg$**B** также не является теоремой, и множество {$\neg$**B**} **СА**-непротиворечиво. Согласно **Лемме 6**, существует насыщенное множество формул $\blacktriangle$, такое что $\neg$**B** $\in \blacktriangle$. Отсюда, в силу **Леммы 7**, $\neg$**B** истинна в канонической модели, связанной с $\blacktriangle$. Поэтому формула **B** ложна в этой модели, что противоречит допущению о ее **СА**-общезначимости. **Метатеорема 3** *доказана*.

Итак, продемонстрирована адекватность класса $\mathbf{M}_{\mathbf{CA}}$-моделей сингулярной негативной силлогистике **СА**. Далее доказываются две метатеоремы о соотношении между $\mathbf{M}_{CA}$-моделями и моделями свободной логики **FL** ($\mathbf{M}_{FL}$-моделями).

Метатеорема 4.

Для всякой модели $\mathbf{M}_{CA}$ *существует модель* $\mathbf{M}_{FL}$ *такая, что для произвольной силлогистической формулы* **A** *имеет место*:

A *истинна в* $\mathbf{M}_{CA}$, *е.т.е.* $\mathbf{A}^*$ *истинна в* $\mathbf{M}_{FL}$.

Рассмотрим произвольную $\mathbf{M}_{CA}$-модель $<\mathbf{U}, \mathbf{D}, \varphi>$. Ассоциируем с ней модель для языка свободной логики: $<\mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{I}>$, где $\mathbf{I}(v) = \varphi(v)$, $\mathbf{I}(P) = \varphi(P)$, $\mathbf{I}(E) = \mathbf{D}$. Очевидно, что построенная модель является $\mathbf{M}_{FL}$-моделью. Доказательство метатеоремы осуществляется индукцией по числу пропозициональных связок в силлогистической формуле **A**. Рассмотрим случаи, когда **A** является элементарной формулой.

I. $\mathbf{A} = v\mathbf{a}S$. Тогда $\mathbf{A}^*$ имеет вид $\underline{S}v \mathbin{\&} Ev$.

Индукцией по числу символов ~ в составе универсалии S покажем, что $|v\mathbf{a}S|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\dot{\forall} g\, |\underline{S}v \mathbin{\&} Ev|_g = \mathbf{1}$.

Пусть S – простая универсалия. Тогда $\underline{S} = S$.

$|v\mathbf{a}S|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(v) \in \varphi(S)$ (в силу **HA1**), е.т.е. $\mathbf{I}(v) \in \mathbf{I}(S)$ (по определению **I**), е.т.е. $\mathbf{I}(v) \in \mathbf{I}(S) \cap \mathbf{D}$ (так как $\mathbf{I}(S) = \varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$), е.т.е. (по определению **I**) $\mathbf{I}(v) \in \mathbf{I}(S) \mathbin{\dot{\&}} \mathbf{I}(v) \in \mathbf{I}(E)$, е.т.е. (в силу **FL1**, **FL2**, **FL4**) $\dot{\forall} g\, |\underline{S}v \mathbin{\&} Ev|_g = \mathbf{1}$.

Пусть S есть отрицательный термин $\sim P$.

$|v\mathbf{a}{\sim}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\varphi(v) \in \upsilon({\sim}P)$ (в силу **HA1**), е.т.е. $\varphi(v) \in \mathbf{D} \setminus \upsilon(P)$ (по определению υ), е.т.е. $\varphi(v) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} \varphi(v) \notin \upsilon(P)$, е.т.е. $\mathbf{I}(v) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} |v\mathbf{a}P|_\varphi = \mathbf{0}$ (по определению **I** и в силу **HA1**), е.т.е. $\mathbf{I}(v) \in \mathbf{D}$ и $\dot{\forall} g\, |\underline{P}v \mathbin{\&} Ev|_g = \mathbf{0}$ (по индуктивному допущению и в силу того, что значения замкнутых формул в **FL** не зависят от g), е.т.е. $\dot{\forall} g(|Ev|_g = \mathbf{1} \mathbin{\dot{\&}} (|\underline{P}v|_g = \mathbf{0}$ или $|Ev|_g = \mathbf{0}))$ (в силу **FL2** и **FL4**), е.т.е. $\dot{\forall} g\, |{\sim}\underline{P}v \mathbin{\&} Ev|_g = \mathbf{1}$ (в силу **FL3** и **FL4**), е.т.е. $\dot{\forall} g\, |\underline{{\sim}P}v \mathbin{\&} Ev|_g = \mathbf{1}$ (по определению «операции подчеркивания»).

При рассмотрении других базисных случаев в ходе доказательства **Метатеоремы 4** нам потребуется обосновать следующее утверждение:

Утверждение 1.

Для произвольной модели $\mathbf{M}_{CA}$ *и построенной по ней модели* $\mathbf{M}_{FL}$ *для любой универсалии* S *и любого приписывания* g *верно*:

$g(x) \in \upsilon(S)$, *е.т.е.* $g(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} |\underline{S}x|_g = \mathbf{1}$.

Доказательство ведется индукцией по числу знаков ~ в составе S.

Пусть S – простая универсалия. Тогда имеем: $g(x) \in \upsilon(S)$, е.т.е. $g(x) \in \varphi(S)$ (по определению υ), е.т.е. $g(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} g(x) \in \varphi(S)$ (по определению φ), е.т.е. $g(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} |Sx|_g = \mathbf{1}$ (по определению **I**).

Положим далее, что S есть $\sim P$. Тогда: $g(x) \in \upsilon({\sim}P)$, е.т.е. $g(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} g(x) \notin \upsilon(P)$ (по определению υ), е.т.е. $g(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} (g(x) \notin \mathbf{D} \mathbin{\dot{\vee}} |\underline{P}x|_g = \mathbf{0})$ (по индуктивному допущению), е.т.е. $g(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} |\underline{{\sim}P}x|_g = \mathbf{1}$ (в силу **FL3** и по определению «операции подчеркивания»).

Продолжим доказательство **Метатеоремы 4**.

II. $\mathbf{A} = S\mathbf{a}P$.

$|S\mathbf{a}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\upsilon(S) \subseteq \upsilon(P) \mathbin{\dot{\&}} \upsilon(S) \neq \varnothing$ (в силу **HA3**), е.т.е. $\dot{\forall} \mathbf{d}{\in}\mathbf{U}\, (\mathbf{d} \in \upsilon(S) \supset \mathbf{d} \in \upsilon(P)) \mathbin{\dot{\&}} \dot{\exists} \mathbf{d}{\in}\mathbf{U}\, (\mathbf{d} \in \upsilon(S))$, е.т.е. $\dot{\forall} g(\dot{\forall} g'(g' =_x g \supset (g'(x) \in \upsilon(S) \mathbin{\dot{\supset}} g'(x) \in \upsilon(P))) \mathbin{\dot{\&}} \dot{\exists} g'(g' =_x g \mathbin{\dot{\&}} g'(x) \in \upsilon(S)))$ (по определению g), е.т.е. $\dot{\forall} g(\dot{\forall} g'(g' =_x g \supset ((g'(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} |\underline{S}x|_{g'} = \mathbf{1}) \supset (g'(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} |\underline{P}x|_{g'} = \mathbf{1})) \mathbin{\dot{\&}} \dot{\exists} g'(g' =_x g \mathbin{\dot{\&}} g'(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} |\underline{S}x|_{g'} = \mathbf{1}))$ (в силу **Утверждения 1**), е.т.е. $\dot{\forall} g(|\forall x(\underline{S}x \supset \underline{P}x)|_g = \mathbf{1} \mathbin{\dot{\&}} |\exists x \underline{S}x|_g = \mathbf{1})$ (в силу **FL6**, **FL8**, **FL9**), е.т.е. $\dot{\forall} g\, |\forall x(\underline{S}x \supset \underline{P}x) \mathbin{\&} \exists x\, \underline{S}x|_g = \mathbf{1}$ (в силу **FL4**).

III. $\mathbf{A} = S\mathbf{i}P$.

$|S\mathbf{i}P|_\varphi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\upsilon(S) \cap \upsilon(P) \neq \varnothing$ (в силу **HA4**), е.т.е. $\dot{\exists} \mathbf{d}{\in}\mathbf{U}\, (\mathbf{d} \in \upsilon(S) \mathbin{\dot{\&}} \mathbf{d} \in \upsilon(P))$, е.т.е. $\dot{\forall} g\, \dot{\exists} g'(g' =_x g \mathbin{\dot{\&}} g'(x) \in \upsilon(S) \mathbin{\dot{\&}} g'(x) \in \upsilon(P))$ (по определению g), е.т.е. $\dot{\forall} g\, \dot{\exists} g'(g' =_x g \mathbin{\dot{\&}} g'(x) \in \mathbf{D} \mathbin{\dot{\&}} |\underline{S}x|_{g'} = \mathbf{1} \mathbin{\dot{\&}} |\underline{P}x|_{g'} = \mathbf{1})$ (в силу **Утверждения 1**), е.т.е. $\dot{\forall} g\, |\exists x(\underline{S}x \mathbin{\&} \underline{P}x)|_g = \mathbf{1}$ (в силу **FL4** и **FL9**).

IV. $\mathbf{A} = v\mathbf{e}S$. **V.** $\mathbf{A} = S\mathbf{e}P$. **VI.** $\mathbf{A} = S\mathbf{o}P$.

Эти случаи сводятся соответственно к рассмотренным случаям (**I**), (**III**) и (**II**). Действительно, силлогистические формулы $v\mathbf{e}S$ и $v\mathbf{a}S$ противоречат друг другу в каждой $\mathbf{M}_{CA}$-модели, а их переводы $(v\mathbf{e}S)^*$ и $(v\mathbf{a}S)^*$ – в каждой $\mathbf{M}_{FL}$-модели. Аналогично для пар формул силлогистики $S\mathbf{e}P$ и $S\mathbf{i}P$, $S\mathbf{o}P$ и $S\mathbf{a}P$ и их переводов.

Доказательство индуктивного перехода тривиально в силу идентичности в $\mathbf{M}_{CA}$-модели и $\mathbf{M}_{FL}$-модели условий истинности формул, главным знаком которых является пропозициональная связка. **Метатеорема 4** *доказана*.

Метатеорема 5.

Для всякой модели $\mathbf{M}_{FL}$ *существует модель* $\mathbf{M}_{CA}$ *такая, что для произвольной силлогистической формулы* **A** *имеет место*:

A *истинна в* $\mathbf{M}_{CA}$, *е.т.е.* $\mathbf{A}^*$ *истинна в* $\mathbf{M}_{FL}$.

Рассмотрим произвольную $\mathbf{M_{FL}}$-модель свободной логики <**U**, **D**, **I**>. Искомая $\mathbf{M_{CA}}$-модель для языка силлогистики представляет собой тройку <**U**, **D**, φ>, где **U** и **D** те же самые, что и в $\mathbf{M_{FL}}$-модели, а функция φ определяется через **I** следующим образом: $\varphi(v) = \mathbf{I}(v)$, $\varphi(P) = \mathbf{I}(P) \cap \mathbf{D}$. Дальнейший ход рассуждений совершенно аналогичен тому, который использовался при доказательстве **Метатеоремы 4**.

На основе двух последних метатеорем продемонстрируем равносильность двух утверждений: об общезначимости произвольной силлогистической формулы в семантике для **CA** и об общезначимости ее $^{\triangledown}$-перевода в свободной логике **FL**.

Метатеорема 6.

Произвольная формула **A** *языка силлогистики является* **CA**-*общезначимой, е.т.е. формула* $\mathbf{A}^{\triangledown}$ **FL**-*общезначима*.

Допустим сначала, что найдется такая **CA**-общезначимая силлогистическая формула **A**, перевод которой $\mathbf{A}^{\triangledown}$ не является **FL**-общезначимым. Тогда существует $\mathbf{M_{FL}}$-модель, в которой формула $\mathbf{A}^{\triangledown}$ не истинна. Согласно **Метатеореме 5**, можно указать такую $\mathbf{M_{CA}}$-модель, где формула **A** также не будет истинной. Последнее противоречит допущению о **CA**-общезначимости **A**.

Пусть, имеется такая формула **A** языка силлогистики, что ее перевод $\mathbf{A}^{\triangledown}$ **FL**-общезначим, а сама **A** не относится к числу **CA**-общезначимых формул. Тогда найдется $\mathbf{M_{CA}}$-модель, в которой **A** не истинна. А согласно **Метатеореме 4**, можно построить и $\mathbf{M_{FL}}$-модель, в которой перевод $\mathbf{A}^{\triangledown}$ не является истинным, что противоречит предположению о его **FL**-общезначимости. **Метатеорема 6** *доказана*.

Тривиальным следствием **Метатеорем 2**, **3**, **6** является утверждение о погружаемости силлогистического исчисления **CA** в свободную логику **FL** посредством перевода $^{\triangledown}$:

Метатеорема 7.

Для произвольной силлогистической формулы **A** *верно, что* **A** *доказуема в системе* **CA**, *е.т.е. формула* $\mathbf{A}^{\triangledown}$ **FL**-общезначима.

Таким образом, исчисление **CA** представляет собой формализацию сингулярной негативной силлогистики, в основе которой лежит аристотелевская трактовка смыслов категорических высказываний.

Обратим внимание на то, что теория **FL**, в которую осуществлялось погружение силлогистики **CA**, представляет собой так называемую *универсальную логику*. Это означает, что в ней допускаются модели, где множество актуальных индивидов является пустым. В принципе, **FL** можно модифицировать, постулировав непустоту актуальной предметной области: $\mathbf{D} \neq \varnothing$. Полученную неуниверсальную свободную логику назовем $\mathbf{FL}^{*}$.

Несложно показать, что система $\mathbf{CA}^{*}$, погружающаяся в теорию $\mathbf{FL}^{*}$ посредством перевода $^{\triangledown}$, может быть получена за счет добавления к исчислению **CA** аксиом следующего типа: $SiS \vee {\sim}Si{\sim}S$.

§ 4. Фундаментальная сингулярная негативная силлогистика в оккамовском языке

Рассмотрим другой класс систем сингулярной негативной силлогистики. Терминное отрицание будет вводиться теперь в оккамовский сингулярный язык, в котором единичные термины могут быть субъектами и предикатами общих и частных высказываний, и где нет специальных силлогистических констант для единичных высказываний. В этом языке допускается применение терминного отрицания не только к универсалиям, но и к сингулярным терминам. Понятия силлогистического термина и формулы определены в § 1 данной главы.

Рассматривая в §2 Главы VII семантику терминов в оккамовском языке сингулярной позитивной силлогистики, мы отмечали, что произвольный силлогистический термин в составе категорических высказываний репрезентирует некоторый класс предметов, в том числе сингулярный термин – некоторый одноэлементный класс. Свойство принадлежности одноэлементному классу $\{v\}$ может быть выражено в языке логики предикатов с равенством посредством предиката $x = v$, а свойство принадлежности классу, представляемому простой универсалией S, – посредством предиката Sx. Была определена функция θ, сопоставляющая силлогистическим терминам соответствующие предикаты языка $\text{ЛП}^{=}$:

$$\theta(v) = (x = v), \quad \theta(S) = Sx.$$

При введении в язык оператора терминного отрицания появляется новый тип терминов – термины, имеющие вид ${\sim}S$, где S – произвольный силлогистический термин. Доопределим функцию θ на множестве отрицательных терминов:

$$\theta({\sim}S) = \neg\theta(S).$$

Рассмотрим интерпретацию категорических высказываний, характерную для фундаментальной силлогистики. Ей будет соответствовать определенный в §2 предыдущей главы перевод * силлогистических формул в язык ЛП$^=$. Единственной особенностью данного перевода в новом языке является тот факт, что термины S и P могут быть как положительными, так и отрицательными:

$$SaP^* = \forall x(\theta(S) \supset \theta(P)), \qquad SeP^* = \forall x(\theta(S) \supset \neg\theta(P)),$$
$$SiP^* = \exists x(\theta(S) \,\&\, \theta(P)), \qquad SoP^* = \exists x(\theta(S) \,\&\, \neg\theta(P)),$$
$$(\neg\mathbf{A})^* = \neg(\mathbf{A}^*), \qquad (\mathbf{A} \nabla \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \nabla \mathbf{B}^*.$$

Фундаментальной сингулярной негативной силлогистикой в оккамовском языке будем называть теорию, законом которой является произвольная формула **A** данного языка, такая, что ее перевод **A*** – теорема исчисления предикатов с равенством.

Аксиоматизация данной теории была предложена В.И. Маркиным [36]. Исчисление **НСФ**^C_O содержит все схемы аксиом **A**^C_O**0**–**A**^C_O**6** (и правила вывода **П1–П3** системы **СФ**^C_O сингулярной позитивной силлогистики, а также новую схему аксиом:

Н^C_O**1**. $veS \equiv va{\sim}S$.

Теоремами системы **НСФ**^C_O являются все принимаемые в традиционной логике законы превращения. Их доказательства получаются из доказательств теорем **Т1–Т5** системы **НСФ**^C_A (см. §2 данной главы) заменой всех вхождений константы $\bar{a}$ на a и константы $\bar{e}$ на e. При этом учитываем, что аналог аксиомы **A**^C_A**5** ($v\bar{e}S \equiv \neg v\bar{a}S$) системы **НСФ**$^C_A$ – формула $veS \equiv \neg vaS$ – доказуем в **НСФ**^C_O (доказательство приведено в §2 Главы VII). Нетрудно также доказать в системе **НСФ**^C_O законы введения и удаления двойного терминного отрицания.

Моделью в семантике **НСФ**^C_O является пара $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$, где $\mathbf{D} \neq \varnothing$, $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$, где S – простая универсалия. Далее, как и в семантике **СФ**^C_O, введем функцию σ, которая сопоставляет произвольному силлогистическому термину подмножество **D**. При этом к имеющемуся определению σ добавляется новый пункт, связанный с наличием в языке отрицательных терминов:

$$\sigma({\sim}S) = \mathbf{D} \setminus \sigma(S).$$

Условия истинности **У1–У4** в модели $\langle\mathbf{D}, \varphi\rangle$ (см. §2 предыдущей главы) распространяются на элементарные формулы оккамовского языка сингулярной негативной силлогистики. Обосновав стандартным способом семантическую непротиворечивость исчисления **НСФ**^C_O, можно перейти к доказательству его семантической полноты.

Условия насыщенности произвольного **НСФ**^C_O-непротиворечивого максимального множества совпадают с условиями (i) и (ii) для

системы **СФ**^C_O. Лемма о возможности расширения произвольного **НСФ**^C_O-непротиворечивого множества Г до **НСФ**^C_O-насыщенного множества формул $\blacktriangle$ доказывается в точности как **Лемма 3** предыдущей главы.

Каноническая модель $\langle\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle\rangle$, связанная с произвольным **НСФ**^C_O-насыщенным множеством $\blacktriangle$, определяется аналогично канонической модели для системы **СФ**^C_O: $\mathbf{D}_\blacktriangle = \{V_v: V_v = \{w: wav \in \blacktriangle\}\}$, $\varphi_\blacktriangle(v) = V_v = \{w: wav \in \blacktriangle\}$, $\varphi_\blacktriangle(S) = \{V_v: vaS \in \blacktriangle\}$, где S – простая универсалия. В канонической модели, согласно определению σ, можно задать функцию $\sigma_\blacktriangle$. Индукцией по числу знаков «~» в составе произвольного силлогистического термина S докажем следующую лемму:

Лемма 8.
Для любого сингулярного термина w, любого силлогистического термина S и произвольного **НСФ**^C_O*-насыщенного множества $\blacktriangle$ имеет место: $V_w \in \sigma_\blacktriangle(S)$, е.т.е. $waS \in \blacktriangle$.*

Базисные случаи (S – простая универсалия, S – сингулярный термин) рассмотрены в **Лемме 4** предыдущей главы.

Пусть $S = {\sim}P$. Согласно индуктивному допущению, $V_w \in \sigma_\blacktriangle(P)$, е.т.е. $waP \in \blacktriangle$. Покажем справедливость леммы для термина ${\sim}P$: $V_w \in \sigma_\blacktriangle({\sim}P)$, е.т.е. $V_w \in \mathbf{D} \setminus \sigma_\blacktriangle(P)$ (по определению σ), е.т.е. $waP \notin \blacktriangle$ (по индуктивному допущению), е.т.е. $weP \in \blacktriangle$ (в силу теоремы $weP \equiv \neg waP$ системы **НСФ**^C_O, свойств (а), (ж), (б), (в) максимального множества), е.т.е. $wa{\sim}P \in \blacktriangle$ (в силу аксиомной схемы **Н**^C_O**1**, свойств (а), (ж), (б)). **Лемма 8** *доказана.*

Утверждение о равнозначности понятий истинности формулы **A** в канонической модели $\langle\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle\rangle$ и принадлежности ее насыщенному множеству $\blacktriangle$ доказывается так же, как **Лемма 5** предыдущей главы. Отсюда следует семантическая полнота системы **НСФ**^C_O, а значит и справедливость утверждения:

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{НСФ}^C_O \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{НСФ}^C_O \models \mathbf{A}).$$

Следующий этап доказательства погружаемости **НСФ**^C_O в исчисление предикатов с равенством посредством функции * состоит в обосновании другого утверждения:

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{НСФ}^C_O \models \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } ЛП^= \models \mathbf{A}^*).$$

Индукцией по числу знаков «~» в составе силлогистического термина S докажем сначала следующую лемму:

Лемма 9.

Для произвольной модели <**D**, φ> *и произвольного силлогистического термина S верно, что* $\mathbf{d} \in \sigma(S)$, *е.т.е.* $|\theta(S)| = \mathbf{1}$ *при приписывании x объекта* $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$.

Базисные случаи ($S = v$, S – простая универсалия) рассмотрены в **Лемме 6** предыдущей главы.

Пусть $S = {\sim}P$. Согласно индуктивному допущению, лемма верна для термина P. Покажем, что она справедлива и для ${\sim}P$. Действительно, $\mathbf{d} \in \sigma({\sim}P)$, е.т.е. $\mathbf{d} \in \mathbf{D} \setminus \sigma(P)$ (определение σ), е.т.е. $|\theta(P)| = \mathbf{0}$ при приписывании x объекта **d** (индуктивное допущение), е.т.е. $|\theta({\sim}P)| = \mathbf{1}$ при данном приписывании (определение θ). **Лемма 9** *доказана*.

Далее с использованием всех выкладок **Леммы 7** предыдущей главы показываем, что истинность силлогистической формулы **A** в произвольной модели <**D**, φ> равнозначна истинности ее перевода **A*** в данной модели. Отсюда непосредственно выводимо:

$$\forall \mathbf{A}(\mathbf{НСФ}^{C}{}_{\mathbf{O}} \vDash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{ЛП}^{=} \vDash \mathbf{A}^*).$$

Используя данное утверждение, а также утверждение о семантической непротиворечивости и полноте системы $\mathbf{НСФ}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ и опираясь на факт семантической непротиворечивости и полноты исчисления предикатов с равенством, можно доказать следующую метатеорему:

Метатеорема 8.

*Функция * погружает систему* $\mathbf{НСФ}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ *в классическое исчисление предикатов с равенством*.

Данная метатеорема свидетельствует о том, что система $\mathbf{НСФ}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ является адекватной формализацией фундаментальной сингулярной негативной силлогистики в оккамовском языке.

§ 5. Формальная реконструкция традиционной сингулярной негативной силлогистики

В данном параграфе осуществляется современная реконструкция того варианта сингулярной негативной силлогистики, который излагается в многочисленных учебниках по традиционной логике. Адекватным для этой реконструкции является именно язык оккамовского типа, поскольку, как уже говорилось выше, в традиционной силлогистике единичные высказывания сводились к множественным, а сингулярным терминам разрешалось занимать место предиката высказывания.

Семантической особенностью традиционной силлогистики – в том числе включающей сингулярные и отрицательные термины – является принятие предпосылки об их непустоте и неуниверсальности. Зададим эксплицирующий данную предпосылку перевод Θ' силлогистических формул на язык логики предикатов с равенством.

Пусть **A** – произвольная формула оккамовского варианта языка сингулярной негативной силлогистики, * – определенный в предыдущем параграфе (на базе синтаксической функции θ) перевод, погружающий систему $\mathbf{НСФ}^{C}{}_{\mathbf{O}}$ в $\mathbf{ИП}^{=}$. Пусть $S_1, \ldots, S_n$ – список всех простых универсалий в формуле **A**. Если данный список непуст, то

$$\Theta'(\mathbf{A}) = (\exists x S_1 x \mathbin{\&} \exists x \neg S_1 x \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \exists x S_n x \mathbin{\&} \exists x \neg S_n x) \supset \mathbf{A}^*;$$

а в случае, когда **A** не содержит простых универсалий, –

$$\Theta'(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^*.$$

Обратим внимание на то, что формула $\exists x S_1 x \mathbin{\&} \exists x \neg S_1 x \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \exists x S_n x \mathbin{\&} \exists x \neg S_n x$, в логике предикатов с равенством не является выполнимой в том случае, когда предметная область содержит ровно один индивид. Однако адекватная экспликация традиционной трактовки категорических высказываний может быть достигнута лишь в рамках такой логической теории, где выполнимость указанной формулы обеспечена во всех предметных областях, допустимых в данной теории. Поэтому перевод Θ' будем осуществлять в исчисление $\mathbf{ИП}^{2=}$, которое получается из стандартного исчисления предикатов с равенством за счет добавления аксиомы $\exists x \exists y \neg (x = y)$. Семантический постулат, адекватный этой аксиоме, гласит: предметная область содержит как минимум два индивида.

При переводе силлогистических формул в исчисление $\mathbf{ИП}^{2=}$ нет необходимости явно выражать предпосылку о непустоте и неуниверсальности сингулярных терминов, так как соответствующая формула $\exists x(x = v) \mathbin{\&} \exists x \neg (x = v)$ – теорема $\mathbf{ИП}^{2=}$. Излишне также указание на непустоту и неуниверсальность терминов вида ${\sim}P$, поскольку формула $\exists x \theta({\sim}P) \mathbin{\&} \exists x \neg \theta({\sim}P)$ эквивалентна в $\mathbf{ИП}^{2=}$ $\exists x \theta(P) \mathbin{\&} \exists x \neg \theta(P)$.

Адекватной реконструкцией традиционной сингулярной негативной силлогистики будет такая силлогистическая теория, которая погружается в исчисление $\mathbf{ИП}^{2=}$ посредством перевода Θ'. Такая система – исчисление **СТ** – была построена В.И. Маркиным в [38]. Ее аксиомами, наряду с аксиомами классического исчисления высказываний, являются формулы следующих видов (v и w – сингулярные термины, S и P – любые силлогистические термины):

СТ1. vav,
СТ2. $vaw \supset wav$,
СТ3. $(SaP \;\&\; vaS) \supset vaP$,
СТ4. $(vaP \;\&\; vaS) \supset SiP$,
СТ5. $SeP \equiv \neg SiP$,
СТ6. $SoP \equiv \neg SaP$,
СТ7. $veS \equiv va{\sim}S$,
СТ8. SiS.

Правилами вывода в системе **СТ** являются:

П1. *modus ponens*,

П2. $\dfrac{\vdash (vaS \;\&\; vaP) \supset \mathbf{A}}{\vdash SiP \supset \mathbf{A},}$ **П3**. $\dfrac{\vdash (vaS \;\&\; veP) \supset \mathbf{A}}{\vdash SoP \supset \mathbf{A},}$

причем v не содержится в заключениях правил **П2** и **П3**.

Данное исчисление является расширением сингулярной позитивной силлогистики $\mathbf{C4}^{C}{}_{0}$, изложенной в §2 Главы VII за счет добавления к постулатам последней схемы аксиом **СТ8**. Следовательно, все законы силлогистики Лукасевича (системы **С4**) доказуемы в **СТ**.

Опишем развернутую схему доказательства погружаемости сингулярной негативной силлогистики **СТ** в расширенное исчисление предикатов с равенством $\mathbf{ИП}^{2=}$ посредством перевода Θ'. Идея данного доказательства аналогична использованной в предыдущей главе при демонстрации погружаемости $\mathbf{C4}^{C}{}_{0}$ в $\mathbf{ИП}^{*}$. Однако здесь есть некоторые особенности, связанные с тем, что погружение силлогистики осуществляется не в стандартное исчисление предикатов с равенством, а в $\mathbf{ИП}^{2=}$.

Сначала строится промежуточное силлогистическое исчисление $\mathbf{НСФ}^{2}$ и показывается его погружаемость в $\mathbf{ИП}^{2=}$ посредством фундаментального перевода *, заданного в предыдущем параграфе.

Затем определяется перевод ϖ_1. Пусть $S_1,\ldots, S_n$ – список всех простых универсалий, содержащихся в силлогистической формуле **A**. Если данный список непуст, то

$$\varpi_1(\mathbf{A}) = (S_1iS_1 \;\&\; {\sim}S_1i{\sim}S_1 \;\&\ldots\&\; S_niS_n \;\&\; {\sim}S_ni{\sim}S_n) \supset \mathbf{A},$$

а в случае отсутствия универсалий в составе **A** –

$$\varpi_1(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Далее демонстрируется погружаемость силлогистики **СТ** в силлогистику $\mathbf{НСФ}^{2}$ посредством операции ϖ_1.

Наконец, обосновывается тот факт, что композиция функций ϖ_1 и * равносильна функции Θ', т.е. что теоремой $\mathbf{ИП}^{2=}$ для произвольной формулы **A** является $[\varpi_1(\mathbf{A})]^* \equiv \Theta'(\mathbf{A})$.

Из перечисленных утверждений вытекает, что Θ' погружает силлогистику **СТ** в $\mathbf{ИП}^{2=}$.

Начнем с построения промежуточной системы сингулярной негативной силлогистики. Выше было предложено исчисление $\mathbf{НСФ}^{C}{}_{0}$, которое посредством перевода * погружается в стандартное (не обогащенное аксиомой $\exists x\exists y\neg(x = y)$) исчисление предикатов с равенством. Силлогистика $\mathbf{НСФ}^{2}$, погружающаяся посредством * в $\mathbf{ИП}^{2=}$, получается добавлением к $\mathbf{НСФ}^{C}{}_{0}$ схемы аксиом

$\mathbf{Н}^{C}{}_{0}\mathbf{2}$. ${\sim}vi{\sim}v$.

Разница между сингулярными негативными силлогистиками $\mathbf{НСФ}^{2}$ и **СТ** в том, что первая содержит схему $\mathbf{Н}^{C}{}_{0}\mathbf{2}$ вместо **СТ8**.

Способ доказательства погружаемости $\mathbf{НСФ}^{2}$ в $\mathbf{ИП}^{2=}$ аналогичен описанному выше методу доказательства погружаемости $\mathbf{НСФ}^{C}{}_{0}$ в стандартное исчисление предикатов с равенством. Поэтому ограничимся изложением общего плана данного доказательства, обращая особое внимание лишь на принципиально новые моменты в нем.

Для $\mathbf{НСФ}^{2}$ следующим образом строится теоретико-множественная семантика.

Моделью называется пара <**D**, φ>, где **D** – произвольное множество, содержащее как минимум два элемента (для системы $\mathbf{НСФ}^{C}{}_{0}$ постулировалась лишь непустота **D**); φ есть функция, приписывающая значения сингулярным терминам и простым универсалиям: $\varphi(v) \in \mathbf{D}$, $\varphi(S) \subseteq \mathbf{D}$. В модели <**D**, φ> определяется семантическая функция σ, которая произвольному силлогистическому термину сопоставляет некоторое подмножество **D**: $\sigma(v) = \{\varphi(v)\}$; $\sigma(S) = \varphi(S)$, если S – простая универсалия; $\sigma({\sim}S) = \mathbf{D} \setminus \sigma(S)$, где S – любой силлогистический термин. Условия истинности формул в модели <**D**, φ> обычные для фундаментальных силлогистик:

И1. $|SaP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\sigma(S) \subseteq \sigma(P)$;
И2. $|SiP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\sigma(S) \cap \sigma(P) \neq \varnothing$;
И3. $|SeP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\sigma(S) \cap \sigma(P) = \varnothing$;
И4. $|SoP|_{\varphi} = 1$, е.т.е. $\sigma(S) \setminus \sigma(P) \neq \varnothing$.

Условия истинности сложных формул, понятия истинности в модели и $\mathbf{НСФ}^{2}$-общезначимости стандартные.

Доказывается непротиворечивость исчисления $\mathbf{НСФ}^{2}$ относительно предложенной семантики. Ограничимся демонстрацией общезначимости аксиом схемы $\mathbf{Н}^{C}{}_{0}\mathbf{2}$:

$|{\sim}vi{\sim}v|_0 = \mathbf{1}$, е.т.е. $\sigma({\sim}v) \cap \sigma({\sim}v) \neq \varnothing$ (в силу **И2**), е.т.е. $\sigma({\sim}v) \neq \varnothing$ (в силу свойств $\cap$), е.т.е. (по определению σ) $\mathbf{D} \setminus \sigma(v) \neq \varnothing$. Последнее условие выполняется в любой модели, поскольку $\sigma(v)$ является одноэлементным множеством (ведь $\sigma(v) = \{\varphi(v)\}$, и $\varphi(v) \in \mathbf{D}$), а **D** имеет мощность, большую единицы.

Далее методом Хенкина доказывается семантическая полнота $\mathbf{Н С Ф}^2$. Понятия $\mathbf{Н С Ф}^2$-непротиворечивого, $\mathbf{Н С Ф}^2$-максимального и $\mathbf{Н С Ф}^2$-насыщенного множеств формул такие же, как для систем $\mathbf{С Ф}^C{}_O$ и $\mathbf{Н С Ф}^C{}_O$. Стандартным способом показывается, что любое $\mathbf{Н С Ф}^2$-непротиворечивое множество расширяемо до насыщенного.

С каждым насыщенным множеством формул $\blacktriangle$ связывается каноническая модель $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle} \rangle$, определяемая точно так же, как в предыдущем параграфе.

Необходимо показать, что $\mathbf{D}_{\blacktriangle}$ содержит как минимум два элемента. В силу максимальности множества $\blacktriangle$, в нем содержится аксиома $\mathbf{H}^C{}_O\mathbf{2}$ – ${\sim}vi{\sim}v$. Поскольку $\blacktriangle$ – насыщенное множество, найдется такой сингулярный термин w, что $wa{\sim}v \in \blacktriangle$. В $\blacktriangle$ имеется также аксиома $\mathbf{H}^C{}_O\mathbf{1}$ – $wev \equiv wa{\sim}v$ и теорема $\mathbf{Н С Ф}^2$ $wev \equiv \neg wav$. Поэтому $wev \in \blacktriangle$, а $wav \notin \blacktriangle$. Последнее означает, что $w \notin V_v$. Вместе с тем, $w \in V_w$, так как аксиома waw содержится в $\blacktriangle$. Таким образом, в составе $\mathbf{D}_{\blacktriangle}$ имеем, по крайней мере, два различных элемента – V_v и V_w.

Дальнейший ход доказательства семантической полноты $\mathbf{Н С Ф}^2$ в точности совпадает с приведенными выше доказательствами полноты для систем $\mathbf{С Ф}^C{}_O$ и $\mathbf{Н С Ф}^C{}_O$. Итак, можно считать обоснованным метаутверждение о том, что произвольная формула **A** доказуема в исчислении $\mathbf{Н С Ф}^2$, е.т.е. она общезначима в классе $\mathbf{Н С Ф}^2$-моделей.

Пару $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$ можно использовать также в качестве стандартной модели для оценки формул языка логики предикатов с равенством. В предыдущем параграфе было показано, что условия истинности произвольной формулы **A** языка сингулярной негативной силлогистики оккамовского типа и условия истинности ее перевода **A*** совпадают в произвольной модели $\langle \mathbf{D}, \varphi \rangle$. Отсюда следует, что формула **A** общезначима в семантике для $\mathbf{Н С Ф}^2$, е.т.е. ее перевод **A*** общезначим в классе моделей логики предикатов с равенством, в которых предметная область имеет мощность большую или равную двум. Указанный класс моделей адекватен исчислению $\mathbf{И П}^{2=}$.

Все сказанное свидетельствует о доказанности метатеоремы:

Метатеорема 9.
*Функция * погружает систему* $\mathbf{Н С Ф}^2$ *в исчисление* $\mathbf{И П}^{2=}$.

Следующий этап рассуждения – доказательство погружаемости силлогистики **СТ** в силлогистику $\mathbf{Н С Ф}^2$ посредством заданного ранее перевода ϖ_1.

Будем опять использовать сформулированный В.А. Смирновым критерий погружаемости одной логической системы в другую.

Докажем первую часть критерия Смирнова, т.е. продемонстрируем, что ϖ_1-переводы всех теорем **СТ** доказуемы в $\mathbf{Н С Ф}^2$.

Рассмотрим доказательство $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_k$ произвольной теоремы **СТ**. Методом возвратной индукции покажем, что ϖ_1-перевод каждого $\mathbf{C}_i$ (в том числе и $\varpi_1(\mathbf{C}_k)$) доказуем в $\mathbf{Н Ф С}^2$. Предположим, что наше утверждение верно для любого $\mathbf{C}_j$, где $j < i$.

Пусть $\mathbf{C}_i$ – одна из аксиом **СТ1** или **СТ2**. Поскольку в их составе отсутствуют простые универсалии, $\varpi_1(\mathbf{C}_i) = \mathbf{C}_i$, и она доказуема в $\mathbf{Н С Ф}^2$, ведь **СТ1** и **СТ2** являются также аксиомами $\mathbf{Н С Ф}^2$. Пусть $\mathbf{C}_i$ – одна из аксиом **СТ3**–**СТ7**. Если $\mathbf{C}_i$ не содержит простых универсалий, то $\varpi_1(\mathbf{C}_i) = \mathbf{C}_i$ – аксиома $\mathbf{Н С Ф}^2$. Если в состав $\mathbf{C}_i$ входят простые универсалии $S_1, \ldots, S_n$, то $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$, т.е. $(S_1 i S_1 \,\&\, {\sim}S_1 i {\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n \,\&\, {\sim}S_n i {\sim}S_n) \supset \mathbf{C}_i$, может быть получена в $\mathbf{Н С Ф}^2$ из аксиомы $\mathbf{C}_i$ с использованием закона утверждения консеквента.

Рассмотрим подробнее случай, когда $\mathbf{C}_i$ есть аксиома **СТ8**, т.е. имеет вид SiS. Термин S может выглядеть двояко: как ${\sim}\ldots{\sim}v$ (v – сингулярный термин) или же как ${\sim}\ldots{\sim}P$ (P – простая универсалия), где негативная приставка ${\sim}\ldots{\sim}$ содержит некоторое число (возможно, равное нулю) вхождений терминного отрицания. Заметим, что в $\mathbf{Н С Ф}^2$ доказуемы формулы вида ${\sim}{\sim}Qi{\sim}{\sim}Q \equiv QiQ$ для силлогистического термина Q любого типа. Поэтому если S имеет вид ${\sim}\ldots{\sim}v$, то ϖ_1-перевод аксиомы SiS эквивалентен в исчислении $\mathbf{Н С Ф}^2$ либо формуле viv (при четном числе знаков ${\sim}$ в негативной приставке), либо формуле ${\sim}vi{\sim}v$ (при нечетном их числе), а обе они доказуемы в $\mathbf{Н С Ф}^2$. Если же S имеет вид ${\sim}\ldots{\sim}P$, то $\varpi_1(SiS)$ равносилен в исчислении $\mathbf{Н С Ф}^2$ либо формуле $(PiP \,\&\, {\sim}Pi{\sim}P) \supset PiP$, либо формуле $(PiP \,\&\, {\sim}Pi{\sim}P) \supset {\sim}Pi{\sim}P$. Обе эти формулы являются пропозициональными тавтологиями.

Пусть $\mathbf{C}_i$ получено из $\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$ и $\mathbf{C}_j$ по *modus ponens*. Согласно индуктивному допущению, $\varpi_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$ и $\varpi_1(\mathbf{C}_j)$ доказуемы в $\mathbf{Н С Ф}^2$. Требуется доказать, что $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$ – теорема данной системы.

Если ни в $\mathbf{C}_j$, ни в $\mathbf{C}_i$ нет простых универсалий, то $\varpi_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = \mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i$, а $\varpi_1(\mathbf{C}_j) = \mathbf{C}_j$. Тогда из этих теорем системы $\mathbf{Н С Ф}^2$ формула $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$, в данном случае совпадающая с $\mathbf{C}_i$, может быть получена по правилу *modus ponens*.

Если $\mathbf{C}_j$ не содержит, а $\mathbf{C}_i$ содержит простые универсалии (S_1,..., S_n), то $\varpi_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (S_1iS_1 \,\&\, {\sim}S_1i{\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_niS_n \,\&\, {\sim}S_ni{\sim}S_n) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$, а $\varpi_1(\mathbf{C}_j) = \mathbf{C}_j$. Тогда из данных теорем с использованием закона коммутации и *modus ponens* можно вывести формулу $(S_1iS_1 \,\&\, {\sim}S_1i{\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_niS_n \,\&\, {\sim}S_ni{\sim}S_n) \supset \mathbf{C}_i$, т.е. $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$.

Если, наоборот, $\mathbf{C}_i$ не содержит, а $\mathbf{C}_j$ содержит простые универсалии (S_1,..., S_n), то $\varpi_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (S_1iS_1 \,\&\, {\sim}S_1i{\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_niS_n \,\&\, {\sim}S_ni{\sim}S_n) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$, а $\varpi_1(\mathbf{C}_j) = (S_1iS_1 \,\&\, {\sim}S_1i{\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_niS_n \,\&\, {\sim}S_ni{\sim}S_n) \supset \mathbf{C}_j$. Тогда с использованием закона самодистрибутивности импликации из этих теорем получаем доказуемую в **НСФ**^{2} формулу $(S_1iS_1 \,\&\, {\sim}S_1i{\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_niS_n \,\&\, {\sim}S_ni{\sim}S_n) \supset \mathbf{C}_i$.

Теперь рассуждением от противного покажем, что и $\mathbf{C}_i$ в данном случае будет теоремой **НСФ**^{2}. Действительно, допустим, что $\mathbf{C}_i$ не доказуема. Тогда она не является общезначимой в построенной выше семантике исчисления **НСФ**^{2}, т.е. должна существовать **НСФ**^{2}-модель <**D**, φ>, в которой $\mathbf{C}_i$ ложна. Сконструируем модель <**D**, φ'>, в которой φ' всем силлогистическим терминам, кроме S_1,..., S_n, приписывает те же значения, что и φ; выберем из универсума **D** произвольный объект **d** (такой объект существует в силу непустоты **D**) и положим, что $\varphi'(S_1) = \ldots = \varphi'(S_n) = \{\mathbf{d}\}$. Очевидно, что формулы S_1iS_1,..., S_niS_n истинны в модели <**D**, φ'>. Кроме этого, окажутся истинными формулы ${\sim}S_1i{\sim}S_1$,..., ${\sim}S_ni{\sim}S_n$, поскольку $\varphi'({\sim}S_1) = \ldots = \varphi'({\sim}S_n) = \mathbf{D} \setminus \{\mathbf{d}\} \neq \varnothing$, ведь **D** в семантике **НСФ**^{2} содержит как минимум два элемента. Таким образом, конъюнкция $S_1iS_1 \,\&\, {\sim}S_1i{\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_niS_n \,\&\, {\sim}S_ni{\sim}S_n$ истинна в <**D**, φ'>. Что же касается формулы $\mathbf{C}_i$, то в данной модели она принимает то же значение, что и в <**D**, φ>, т.е. ложна в ней, поскольку термины S_1,..., S_n отсутствуют в $\mathbf{C}_i$. Поэтому формула $(S_1iS_1 \,\&\, {\sim}S_1i{\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_niS_n \,\&\, {\sim}S_ni{\sim}S_n) \supset \mathbf{C}_i$ ложна в модели <**D**, φ'>, а значит не доказуема в **НСФ**^{2}, что свидетельствует о получении противоречия в нашем рассуждении. Итак, и в этом случае $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$, которая здесь совпадает с $\mathbf{C}_i$, является теоремой **НСФ**^{2}.

Наиболее громоздким является случай, когда и $\mathbf{C}_j$, и $\mathbf{C}_i$ содержат простые универсалии. Пусть M_1,..., M_r – список такого рода терминов, входящих в $\mathbf{C}_j$, но не входящих в $\mathbf{C}_i$; P_1,..., P_m – список универсалий, входящих и в $\mathbf{C}_j$, и в $\mathbf{C}_i$, а Q_1,..., Q_s – список универсалий, не входящих в $\mathbf{C}_j$, но входящих в $\mathbf{C}_i$. Ясно, что в рассматриваемом случае по отдельности каждый из трех списков может, в принципе, оказаться пустым, но, по крайней мере, один – первый или второй, а также второй или третий – обязательно непуст. Обозначим через $\mathbf{K}_M$

формулу $M_1iM_1 \,\&\, {\sim}M_1i{\sim}M_1 \,\&\, \ldots \,\&\, M_riM_r \,\&\, {\sim}M_ri{\sim}M_r$, через $\mathbf{K}_P$ – формулу $P_1iP_1 \,\&\, {\sim}P_1i{\sim}P_1 \,\&\, \ldots \,\&\, P_miP_m \,\&\, {\sim}P_mi{\sim}P_m$ и через $\mathbf{K}_Q$ – формулу $Q_1iQ_1 \,\&\, {\sim}Q_1i{\sim}Q_1 \,\&\, \ldots \,\&\, Q_siQ_s \,\&\, {\sim}Q_si{\sim}Q_s$. Очевидно, что $\varpi_1(\mathbf{C}_j) = (\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P) \supset \mathbf{C}_j$, $\varpi_1(\mathbf{C}_i) = (\mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset \mathbf{C}_i$, а $\varpi_1(\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i) = (\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$. Согласно индуктивному допущению, первая и третья формулы доказуемы в **НСФ**^{2}. Покажем, что тогда теоремой **НСФ**^{2} должна быть и вторая формула.

Из доказуемости $(\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P) \supset \mathbf{C}_j$ и $(\mathbf{K}_M \,\&\, \mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset (\mathbf{C}_j \supset \mathbf{C}_i)$, в силу законов логики высказываний, вытекает доказуемость в **НСФ**^{2} формулы $\mathbf{K}_M \supset ((\mathbf{K}_P \,\&\, \mathbf{K}_Q) \supset \mathbf{C}_i)$, т.е. $\mathbf{K}_M \supset \varpi_1(\mathbf{C}_i)$.

Если список M_1,..., M_r пуст, то $\mathbf{K}_M \supset \varpi_1(\mathbf{C}_i)$ есть просто $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$ и мы уже получили утверждение о доказуемости ϖ_1-перевода $\mathbf{C}_i$. В случае непустоты указанного списка продолжим рассуждение методом от противного.

Допустим, что $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$ недоказуема в **НСФ**^{2}. Тогда данная формула не является **НСФ**^{2}-общезначимой, т.е. существует **НСФ**^{2}-модель <**D**, φ>, в которой она ложна. Рассмотрим модель <**D**, φ'>, где φ' всем терминам, отличным от M_1,..., M_r, приписывает те же значения, что и φ, а $\varphi'(M_1) = \varphi'(M_2) = \ldots = \varphi'(M_r) = \{\mathbf{d}\}$, где **d** – произвольный элемент непустого **D**. В модели <**D**, φ'> каждая из формул M_1iM_1,..., M_riM_r примет значение **1** в силу непустоты множества $\{\mathbf{d}\}$. Но множество $\mathbf{D} \setminus \{\mathbf{d}\}$ также непусто, ведь **D** в **НСФ**^{2}-моделях содержит более одного элемента. Поэтому истинными в <**D**, φ'> будут также формулы ${\sim}M_1i{\sim}M_1$,..., ${\sim}M_ri{\sim}M_r$. Значит, конъюнкция $\mathbf{K}_M$ истинна в рассматриваемой модели. Что же касается формулы $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$, то поскольку она не содержит M_1,..., M_r, значение ее в <**D**, φ'> будет тем же, что и в модели <**D**, φ>, т.е. **0**. Из сказанного следует, что формула $\mathbf{K}_M \supset \varpi_1(\mathbf{C}_i)$ ложна в <**D**, φ'> и потому она не является теоремой **НСФ**^{2}, что противоречит выведенному ранее из индуктивного предположения следствию. Таким образом, $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$ доказуема в **НСФ**^{2}.

Пусть $\mathbf{C}_i$ получена из $\mathbf{C}_j$ по правилу **П2**. Тогда $\mathbf{C}_j = (vaS \,\&\, vaP) \supset \mathbf{A}$, а $\mathbf{C}_i = SiP \supset \mathbf{A}$. Очевидно, что множества простых универсалий в $\mathbf{C}_j$ и $\mathbf{C}_i$ совпадают. Случай, когда эти множества пусты, очевиден. При наличии в $\mathbf{C}_j$ и в $\mathbf{C}_i$ подобных терминов Q_1,..., Q_n по индуктивному допущению имеем: $\varpi_1(\mathbf{C}_j) = (Q_1iQ_1 \,\&\, {\sim}Q_1i{\sim}Q_1 \,\&\ldots\&\, Q_niQ_n \,\&\, {\sim}Q_ni{\sim}Q_n) \supset ((vaS \,\&\, vaP) \supset \mathbf{A})$ доказуемо в **НСФ**^{2}. Отсюда по закону коммутации получаем теорему $(vaS \,\&\, vaP) \supset ((Q_1iQ_1 \,\&\, {\sim}Q_1i{\sim}Q_1 \,\&\ldots\&\, Q_niQ_n \,\&\, {\sim}Q_ni{\sim}Q_n) \supset \mathbf{A})$. Применяем правило **R2**: $SiP \supset ((Q_1iQ_1 \,\&\, {\sim}Q_1i{\sim}Q_1 \,\&\ldots\&\, Q_niQ_n \,\&\, {\sim}Q_ni{\sim}Q_n) \supset \mathbf{A})$. Используя вновь закон коммутации, выводим $(Q_1 i Q_1 \,\&\, {\sim}Q_1 i {\sim} Q_1 \,\&\ldots\&\, Q_n i Q_n \,\&\, {\sim}Q_n i {\sim}Q_n) \supset (SiP \supset \mathbf{A})$, т.е. $\varpi_1(\mathbf{C}_i)$ в качестве теоремы **НСФ**^{2}.

Случай, когда $\mathbf{C}_i$ получена по правилу **П3**, рассматривается аналогично.

Таким образом, ϖ_1-перевод любой теоремы **СТ** доказуем в **НСФ**^{2}, и доказательство первой части критерия Смирнова завершено.

Для доказательства второй его части рассмотрим перевод ϖ_2 из **НСФ**^{2} в **СТ**: $\varpi_2(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. Поскольку **НСФ**^{2} является подсистемой **СТ**, ϖ_2-перевод любой теоремы **НСФ**^{2} доказуем в исчислении **СТ**.

Остается удостовериться в выполнении третьей части критерия Смирнова – в том, что для любой формулы **A** в системе **СТ** доказуема формула $\mathbf{A} \equiv \varpi_2(\varpi_1(\mathbf{A}))$. Если **A** не содержит простых универсалий, то $\varpi_2(\varpi_1(\mathbf{A}))$ совпадает с **A**, а $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ – теорема **СТ**. Если же **A** содержит простые универсалии $S_1,\ldots, S_n$, то $\varpi_2(\varpi_1(\mathbf{A})) = \varpi_1(\mathbf{A}) = (S_1 i S_1 \,\&\, {\sim}S_1 i {\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n \,\&\, {\sim}S_n i {\sim}S_n) \supset \mathbf{A}$. В системе **СТ** с использованием аксиом схемы **СТ8** и правила введения конъюнкции легко доказать формулу $S_1 i S_1 \,\&\, {\sim}S_1 i {\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n \,\&\, {\sim}S_n i {\sim}S_n$. Из нее, по законам логики высказываний, выводима импликация $((S_1 i S_1 \,\&\, {\sim}S_1 i {\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n \,\&\, {\sim}S_n i {\sim}S_n) \supset \mathbf{A}) \supset \mathbf{A}$. Обратная импликация представляет собой закон утверждения консеквента. Таким образом, в **СТ** имеем теорему $\mathbf{A} \equiv ((S_1 i S_1 \,\&\, {\sim}S_1 i {\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n \,\&\, {\sim}S_n i {\sim}S_n) \supset \mathbf{A})$.

Итак, все три части критерия Смирнова выполняются, что свидетельствует о доказанности следующей метатеоремы:

Метатеорема 10.
Силлогистика **СТ** *погружается в силлогистику* **НФС**^{2} *посредством перевода* ϖ_1.

Теперь мы в состоянии обосновать главный тезис данного параграфа: исчисление **СТ** является адекватной формализацией традиционной сингулярной негативной силлогистики.

Метатеорема 11.
Перевод Θ' *погружает силлогистику* **СТ** *в исчисление* **ИП**$^{2=}$.

Согласно **Метатеореме 10**, функция ϖ_1 погружает систему сингулярной негативной силлогистики **СТ** в «промежуточное» силлогистическое исчисление **НФС**^{2}. Последнее, в свою очередь, согласно **Метатеореме 9**, погружается в расширенное исчисление предикатов с равенством **ИП**$^{2=}$ посредством перевода *. Отсюда следует, что силлогистика **СТ** погружается в **ИП**$^{2=}$ посредством композиции переводов

ϖ_1 и *. Остается продемонстрировать равносильность в исчислении **ИП**$^{2=}$ данной композиции переводу Θ'.

Если силлогистическая формула **A** не содержит простых универсалий, то $(\varpi_1(\mathbf{A}))^* = \mathbf{A}^* = \Theta'(\mathbf{A})$.

Если же **A** содержит простые универсалии $S_1,\ldots, S_n$, то $(\varpi_1(\mathbf{A}))^* = ((S_1 i S_1 \,\&\, {\sim}S_1 i {\sim}S_1 \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n \,\&\, {\sim}S_n i {\sim}S_n) \supset \mathbf{A})^* = (S_1 i S_1{}^* \,\&\, {\sim}S_1 i {\sim}S_1{}^* \,\&\, \ldots \,\&\, S_n i S_n{}^* \,\&\, {\sim}S_n i {\sim}S_n{}^*) \supset \mathbf{A}^* = (\exists x(S_1 x \,\&\, S_1 x) \,\&\, \exists x(\neg S_1 x \,\&\, \neg S_1 x) \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x(S_n x \,\&\, S_n x) \,\&\, \exists x(\neg S_n x \,\&\, \neg S_n x)) \supset \mathbf{A}^*$. Последняя формула эквивалентна в исчислении **ИП**$^{2=}$ формуле $(\exists x S_1 x \,\&\, \exists x \neg S_1 x \,\&\, \ldots \,\&\, \exists x S_n x \,\&\, \exists x \neg S_n x) \supset \mathbf{A}^*$, совпадающей в данном случае с $\Theta'(\mathbf{A})$.

Глава IX

РАСШИРЕННАЯ И КВАНТОРНАЯ СИЛЛОГИСТИКИ

§ 1. Расширенная силлогистика и булева алгебра

До сих пор исследование силлогистических теорий велось посредством их сравнения с одноместным исчислением предикатов. При этом само исчисление предикатов существенно использовалось для решения разных задач. Во-первых, с помощью этого исчисления задавались условия истинности для категорических высказываний, во-вторых, доказательство метатеорем о погружаемости некоторой формальной силлогистической теории в исчисление предикатов позволяло продемонстрировать адекватность предлагаемых формализаций.

Полученные выше результаты показывали, что каждая из рассмотренных силлогистических теорий представляет собой некоторый фрагмент одноместного исчисления предикатов. С другой стороны, представляет интерес и обратная задача – установление того, какая часть современной логики может быть описана силлогистически. Предлагаемый здесь ответ состоит в том, что вся элементарная булева алгебра оказывается содержащейся в некоторой силлогистической теории. А так как элементарная булева алгебра эквивалентна одноместному первопорядковому исчислению предикатов, то данный ответ означает, что одноместный фрагмент исчисления предикатов содержится в силлогистике.

Чтобы доказать этот результат, необходимо сформулировать так называемую *расширенную силлогистику*. Это будет теория чистой силлогистики, т.е. теория, использующая только универсалии, но последние могут быть сложными выражениями, образующимися из других универсалий с помощью терминных операторов. К числу данных операторов, кроме терминного отрицания, которое использовалось в предыдущих главах, относятся операторы *терминной конъюнкции* (обычно выражается посредством союза «и» и будет обозначаться символом «×») и *терминной дизъюнкции* (выражается с помощью союза «или» и будет обозначаться знаком «+»). Интуитивно семантика двух последних операторов такова: сложный термин $S \times P$ репрезентирует теоретико-множественное пересечение объемов терминов S и P, а термин $S + P$ – их объединение.

Алфавит чистой расширенной силлогистики, понятия силлогистического термина и силлогистической формулы были определены в §1

первой главы, к которой мы и отсылаем. Единственная корректировка, которую нужно произвести в связи с рассматриваемой ниже системой, состоит в том, что из алфавита удаляются силлогистические константы *e* и *o*, которые вводятся по определению.

На базе данного языка могут быть сформулированы различные расширенные силлогистики. Мы рассмотрим первоначально предложенную В.А. Бочаровым [5] систему чистой расширенной силлогистики **C2Ar**, позитивным силлогистическим фрагментом которой является исчисление **C2**. Ее аксиомными схемами являются:

C2Ar0. Схемы аксиом классической логики высказываний,
C2Ar1. $(MeP \,\&\, SaM) \supset Sa{\sim}P$,
C2Ar2. $Se{\sim}S$,
C2Ar3. $(MeP \,\&\, SiM) \supset Si{\sim}P$,
C2Ar4. $So{\sim}S$,
C2Ar5. $(P \times S)eM \supset (M \times P)eS$,
C2Ar6. $SaP \supset Se{\sim}P$,
C2Ar7. $Se(P + M) \equiv (SeP \,\&\, SeM)$,
C2Ar8. $SiP \supset SaS$,
C2Ar9. $Se{\sim}(P \times M) \equiv (Se{\sim}P \,\&\, Se{\sim}M)$,
C2Ar10. $Sa{\sim}{\sim}P \supset SaP$.

Единственным правилом вывода является правило *modus ponens*. По определению принимаются:

D1. $SeP \equiv \neg SiP$, **D3**. $0 = S \times {\sim}S$,
D2. $SoP \equiv \neg SaP$, **D4**. $1 = S + {\sim}S$.

В качестве соотношений, задающих элементарную *булеву алгебру*, мы выбираем аксиомные схемы Р. Сикорского (см. [58]):

1.	$S \times P = P \times S$	коммутативность
2.	$S + P = P + S$	
3.	$S \times (P \times M) = (S \times P) \times M$	ассоциативность
4.	$S + (P + M) = (S + P) + M$	
5.	$(S \times P) + P = P$	поглощение
6.	$(S + P) \times P = P$	
7.	$S \times (P + M) = (S \times P) + (S \times M)$	дистрибутивность
8.	$S + (P \times M) = (S + P) \times (S + M)$	
9.	$(S \times {\sim}S) + P = P$	закон противоречия
10.	$(S + {\sim}S) \times P = P$	закон исключенного третьего

Эти аксиомные схемы полностью определяют булеву алгебру. Как дедуктивная система булева алгебра будет считаться элементарной, если ее средства дедукции не выходят за рамки логики высказываний. Мы будем далее широко пользоваться решеточными соотношениями, поскольку булева алгебра и булева решетка являются эквивалентными объектами.

Для доказательства требуемого результата достаточно показать, что элементарная булева алгебра и силлогистика **C2Ar** являются *дефинициально эквивалентными системами*. При этом понятие дефинициальной эквивалентности определяется следующим образом: пусть $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ – теории, сформулированные в разных словарях. Пусть далее $\mathbf{D_1}$ – множество определений в $\mathbf{T_2}$ терминов словаря $\mathbf{T_1}$, отсутствующих в словаре $\mathbf{T_2}$, а $\mathbf{D_2}$ – множество определений в теории $\mathbf{T_1}$ терминов словаря $\mathbf{T_2}$, отсутствующих в $\mathbf{T_1}$. Теории $\mathbf{T_1}$ и $\mathbf{T_2}$ называются *дефинициально эквивалентными*, если дедуктивные замыкания классов $\mathbf{T_1} \cup \mathbf{D_2}$ и $\mathbf{T_2} \cup \mathbf{D_1}$ совпадают.

Это же самое можно выразить и несколько иначе. Будем смотреть на указанные определения как на некоторые функции, переводящие выражения одного языка на другой. Пусть δ_1: **БА** $\to$ **C2Ar** и δ_2: **C2Ar** $\to$ **БА** будут такими функциями. Тогда доказательство метатеоремы (1) $\mathbf{C2Ar} \vdash \mathbf{A} \supset \textbf{БА} \vdash \delta_2(\mathbf{A})$ означает возможность определить силлогистическую структуру в булевой, а (2) $\textbf{БА} \vdash \mathbf{A} \;\dot{\supset}\; \mathbf{C2Ar} \vdash \delta_1(\mathbf{A})$ – булеву структуру в силлогистической. Если далее доказана метатеорема (3) $\mathbf{C2Ar} \vdash (\mathbf{A} \equiv \delta_1(\delta_2(\mathbf{A})))$, то это говорит о погружении силлогистики в булеву алгебру посредством перевода δ_2, доказательство же (4) $\textbf{БА} \vdash (\mathbf{A} \equiv \delta_2(\delta_1(\mathbf{A})))$ – об обратном погружении посредством перевода δ_1. Совместно все четыре теоремы как раз и доказывают дефинициальную эквивалентность, и, следовательно, данные структуры являются лишь разными языковыми способами задания одного и того же абстрактного объекта. Функции δ_1 и δ_2 имеют следующий вид:

$\delta_2(SaP) = S \times P = S \;\&\; S > 0$,	$\delta_1(S \le P) = Se{\sim}P$,
$\delta_2(SeP) = S \times P = 0$,	$\delta_1(S = P) = Se{\sim}P \;\&\; Pe{\sim}S$,
$\delta_2(SiP) = S \times P > 0$,	$\delta_1(S < P) = Se{\sim}P \;\&\neg Pe{\sim}S$,
$\delta_2(SoP) = S \times P < S \;\vee\; S = 0$,	$\delta_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\delta_1(\mathbf{A})$,
$\delta_2(\neg\mathbf{A}) = \neg\delta_2(\mathbf{A})$,	$\delta_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \delta_1(\mathbf{A}) \nabla \delta_1(\mathbf{B})$.
$\delta_2(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \delta_2(\mathbf{A}) \nabla \delta_2(\mathbf{B})$,	

Метатеорема 1.

Для всякой формулы **A** *верно:* $\mathbf{C2Ar} \vdash \mathbf{A} \;\dot{\supset}\; \textbf{БА} \vdash \delta_2(\mathbf{A})$.

Для доказательства метатеоремы достаточно ограничиться установлением требуемого соотношения лишь для аксиомных схем **C2Ar**, так как индуктивный шаг, связанный с *modus ponens*, доказывается тривиально. Итак:

$\delta_2(\mathbf{C2Ar1}) = \delta_2((MeP \;\&\; SaM) \supset Sa{\sim}P) = (M \times P = 0 \;\&\; S \times M = S \;\&\; S > 0) \supset (S \times {\sim}P = S \;\&\; S > 0)$. По определению псевдодополнения $M \times P = 0$ равносильно $M \le {\sim}P$, а по определению частичного порядка $S \times M = S$ равносильно $S \le M$. Отсюда по транзитивности имеем $S \le {\sim}P$, что и дает в соответствии с определением частичного порядка $S \times {\sim}P = S$. Поэтому антецедент данной импликации влечет консеквент, т.е. δ_2-перевод выражения $Sa{\sim}P$.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar2}) = \delta_2(Se{\sim}S) = (S \times {\sim}S) = 0$, что является справедливым утверждением в булевой алгебре.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar3}) = \delta_2((MeP \;\&\; SiM) \supset Si{\sim}P) = (M \times P = 0 \;\&\; S \times M > 0) \supset (S \times {\sim}P > 0)$. Выражение $M \times P = 0$ равносильно $M \times {\sim}P = M$. Используя в $S \times M > 0$ замену равного равным, получаем $S \times (M \times {\sim}P) > 0$. По коммутативности и ассоциативности имеем: $(S \times {\sim}P) \times M > 0$. Отсюда получаем $(S \times {\sim}P) > 0$.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar4}) = \delta_2(So{\sim}S) = (S \times {\sim}S) < S \vee S = 0$. Так как в булевой алгебре $(S \times {\sim}S) = 0$, имеем, что $0 < S \vee S = 0$. Последнее равносильно $0 \le S$, а это является законом булевой алгебры.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar5}) = \delta_2((P \times S)eM \supset (M \times P)eS) = ((P \times S) \times M = 0) \supset ((M \times P) \times S) = 0)$. Справедливость этого утверждения в булевой алгебре очевидна.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar6}) = \delta_2(SaP \supset Se{\sim}P) = (S \times P = S \;\&\; S > 0) \supset (S \times {\sim}P = 0)$. По определению частичного порядка $S \times P = S$ равносильно $S \le P$. Откуда, используя определение псевдодополнения, получаем $S \times {\sim}P = 0$.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar7}) = \delta_2(Se(P + M) \equiv (SeP \;\&\; SeM)) = (S \times (P + M) = 0) \equiv (S \times P = 0 \;\&\; S \times M = 0)$. Из $S \times (P + M) = 0$ по дистрибутивности следует $(S \times P) + (S \times M) = 0$, что равносильно $S \times P = 0$ и $S \times M = 0$.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar8}) = \delta_2(SiP \supset SaS) = (S \times P > 0) \supset (S \times S = S \;\&\; S > 0)$. Справедливость последнего соотношения в булевой алгебре очевидна.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar9}) = \delta_2(Se{\sim}(P \times M) \equiv (Se{\sim}P \;\&\; Se{\sim}M)) = (S \times {\sim}(P \times M) = 0) \equiv (S \times {\sim}P = 0 \;\&\; S \times {\sim}M = 0)$. По определению псевдодополнения имеем $S \le (P \times M) \equiv S \le P \;\&\; S \le M$ – законное соотношение булевой решетки.

$\delta_2(\mathbf{C2Ar10}) = \delta_2(Sa{\sim}{\sim}P \supset SaP) = (S \times P = S \;\&\; S > 0) \supset (S \times P = S \;\&\; S > 0)$. Последнее утверждение есть частный случай закона тождества логики высказываний.

Рассмотренные случаи завершают доказательство **Метатеоремы 1**, которая, кроме всего прочего, в силу известного факта непротиворечивости булевой алгебры, означает, что и исследуемая система **C2Ar** также непротиворечива.

Метатеорема 2.
Для всякого соотношения булевой алгебры **A** *верно следующее утверждение*: **БА** $\vdash$ **A** $\supset$ **C2Ar** $\vdash \delta_1$(**A**).

Прежде чем перейти к доказательству этой основной теоремы, укажем, что в **C2Ar** доказуемы утверждения

T1. $SiP \equiv PiS$, **T5**. $(S \times P)e{\sim}S$,
T2. $SeP \equiv PeS$, **T6**. $(S \times P)e{\sim}P$,
T3. $SaP \supset SiP$, **T7**. $(P \times {\sim}S)eS$,
T4. $SeP \supset SoP$, **T8**. $({\sim}P \times S)eP$,

которые требуются для дальнейших рассуждений, а также модусы *Barbara* и *Celarent* (доказательство этих теорем опускается, так как **T1–T4** доказываются элементарно просто, а теоремы **T5–T8** будут получены ниже). Тем самым в системе **C2Ar** содержится в качестве фрагмента силлогистика **C2**. Отметим также, что в **C2Ar**, которая базируется на классической логике высказываний, имеет место принцип замены эквивалентных выражений:

(**ПЗ**) (**A** $\equiv$ **B**) $\supset$ (**K**(**A**) $\equiv$ **K**(**B**)),

где **K** – произвольный формульный контекст данного языка.

Лемма 1.
В **C2Ar** *содержится принцип подстановочности равных*:

(**ПП**) $(S = P) \supset (K(S) \equiv K(P))$

для произвольного формульного контекста $K(S)$, *в котором произвольный термин* S *является либо субъектом, либо предикатом какого-либо выражения*.

В силу наличия в **C2Ar** принципа **ПЗ**, для доказательства леммы достаточно показать, что **ПП** выполняется для элементарных формул.

I. $(S = P) \supset (SiM \supset PiM)$ – подстановка субъекта в ***i***.

1.	$S = P$	допущение
2.	SiM	допущение
3.	$Se{\sim}P$	1, опред. =; **ЛВ**

4.	$Pe{\sim}S$	
5.	$(MeP \,\&\, SiM) \supset Si{\sim}P$	**C2Ar3**
6.	$(\neg Si{\sim}P \,\&\, SiM) \supset \neg MeP$	5; **ЛВ**
7.	$(Se{\sim}P \,\&\, SiM) \supset MiP$	6, опред. ***e***
8.	$Se{\sim}P \,\&\, SiM$	3, 2; **ЛВ**
9.	MiP	7, 8; **ЛВ**
10.	PiM	9, **T1**

Ввиду симметричности равенства будет верен и принцип

II. $(S = P) \supset (SiM \equiv PiM)$.

Так как для ***i*** имеет место обращение (**T1**), то по **ПЗ** из **II** легко получается принцип подстановочности равного равным в форме:

III. $(S = P) \supset (MiS \equiv MiP)$ – подстановка предиката в ***i***.

Из двух последних утверждений на основе **D1** и контрапозиции доказывается справедливость

IV. $(S = P) \supset (SeM \equiv PeM)$,
V. $(S = P) \supset (MeS \equiv MeP)$.

Покажем теперь справедливость **ПП** для высказываний типа ***a***:

VI. $(S = P) \supset (SaM \supset PaM)$ – подстановка субъекта в ***a***.

1.	$S = P$	допущение
2.	SaM	допущение
3.	$Se{\sim}P$	1, опред. =; **ЛВ**
4.	$Pe{\sim}S$	
5.	$({\sim}MeS \,\&\, Pi{\sim}M) \supset Pi{\sim}S$	**C2Ar3**
6.	$({\sim}MeS \,\&\, Pe{\sim}S) \supset Pe{\sim}M$	5; **ЛВ**
7.	${\sim}MeS$	2, **C2Ar6**, **T2**; **ЛВ**
8.	${\sim}MeS \,\&\, Pe{\sim}S$	7, 4; **ЛВ**
9.	$Pe{\sim}M$	6, 8; **ЛВ**
10.	$SaM \supset SiP$	**T3**
11.	SiP	10, 2; **ЛВ**
12.	PiS	11, **T1**; **ЛВ**
13.	PaP	12, **C2Ar8**; **ЛВ**
14.	$Pe{\sim}M \,\&\, PaP$	9, 13; **ЛВ**
15.	$(Pe{\sim}M \,\&\, PaP) \supset Pa{\sim}{\sim}M$	**C2Ar1**
16.	$Pa{\sim}{\sim}M$	15, 14; **ЛВ**
17.	PaM	16, **C2Ar10**; **ЛВ**

VII. $(S = P) \supset (MaS \supset MaP)$ – подстановка предиката в *a*.

1.	$S = P$	допущение
2.	MaS	допущение
3.	$Se{\sim}P$	1, опред. =; **ЛВ**
4.	$Pe{\sim}S$	
5.	$(Se{\sim}P \ \& \ MaS) \supset Ma{\sim}{\sim}P$	**C2Ar1**
6.	$Se{\sim}P \ \& \ MaS$	3, 2; **ЛВ**
7.	$Ma{\sim}{\sim}P$	5, 6; **ЛВ**
8.	MaP	7, **C2Ar10**; **ЛВ**

Опять-таки по симметричности равенства имеют место два более сильных утверждения:

VIII. $(S = P) \supset (SaM \equiv PaM)$.
IX. $(S = P) \supset (MaS \equiv MaP)$.

Отсюда по контрапозиции и **D2** следует **ПП** в форме:

X. $(S = P) \supset (SoM \equiv PoM)$.
XI. $(S = P) \supset (MoS \equiv MoP)$.

На этом доказательство **Леммы 1** завершено и можно переходить к доказательству **Метатеоремы 2**. Покажем прежде всего справедливость $S = {\sim}{\sim}S$ и законов Де Моргана, которые будут использоваться для обоснования других соотношений.

T9. $S = {\sim}{\sim}S$ (или, согласно δ_2: $Se{\sim}{\sim}{\sim}S \ \& \ {\sim}{\sim}Se{\sim}S$).

1.	${\sim}Se{\sim}{\sim}S$	**C2Ar2**
2.	${\sim}{\sim}Se{\sim}S$	1, **T2**; **ЛВ**
3.	$Se{\sim}S$	**C2Ar2**
4.	${\sim}{\sim}Se{\sim}{\sim}{\sim}S$	**C2Ar2**
5.	$Se{\sim}S \ \& \ {\sim}{\sim}Se{\sim}{\sim}{\sim}S$	3, 4; **ЛВ**
6.	$(Se{\sim}S \ \& \ {\sim}{\sim}{\sim}SiS) \supset {\sim}{\sim}{\sim}Si{\sim}S$	**C2Ar3**
7.	$(Se{\sim}S \ \& \ {\sim}{\sim}{\sim}Se{\sim}{\sim}S) \supset {\sim}{\sim}{\sim}SeS$	6, опред. *e*; **ЛВ**
8.	$(Se{\sim}S \ \& \ {\sim}{\sim}Se{\sim}{\sim}{\sim}S) \supset Se{\sim}{\sim}{\sim}S$	7, **T2**; **ЛВ**
9.	$Se{\sim}{\sim}{\sim}S$	8, 5; **ЛВ**
10.	$Se{\sim}{\sim}{\sim}S \ \& \ {\sim}{\sim}Se{\sim}S$	9, 2; **ЛВ**

T10. $({\sim}S + {\sim}P)e{\sim}{\sim}(S \times P)$ – обоснование $({\sim}S + {\sim}P) \leq {\sim}(S \times P)$.

1.	$(S \times P)e{\sim}(S \times P)$	**C2Ar2**
2.	$(S \times P)e{\sim}S \ \& \ (S \times P)e{\sim}P$	2, **C2Ar9**; **ЛВ**

3.	$(S \times P)e({\sim}S + {\sim}P)$	3, **C2Ar7**; **ЛВ**
4.	$({\sim}S + {\sim}P)e(S \times P)$	4, **T2**; **ЛВ**
5.	$({\sim}S + {\sim}P)e{\sim}{\sim}(S \times P)$	5, **T9**; **ПП**

T11. ${\sim}(S \times P)e{\sim}({\sim}S + {\sim}P)$ – обоснование ${\sim}(S \times P) \leq ({\sim}S + {\sim}P)$.

1.	$({\sim}S + {\sim}P)e{\sim}({\sim}S + {\sim}P)$	**C2Ar2**
2.	${\sim}({\sim}S + {\sim}P)e({\sim}S + {\sim}P)$	1, **T2**; **ЛВ**
3.	${\sim}({\sim}S + {\sim}P)e{\sim}S \ \& \ {\sim}({\sim}S + {\sim}P)e{\sim}P$	2, **C2Ar7**; **ЛВ**
4.	${\sim}({\sim}S + {\sim}P)e{\sim}(S \times P)$	3, **C2Ar9**; **ЛВ**
5.	${\sim}(S \times P)e{\sim}({\sim}S + {\sim}P)$	4, **T2**; **ЛВ**

Теоремы **T10** и **T11** совместно обосновывают наличие в **C2Ar** закона Де Моргана вида

$${\sim}(S \times P) = ({\sim}S + {\sim}P).$$

Отметим, что формула 3 из доказательства **T11** представляет собой конъюнкцию **T5** и **T6**, поэтому последние тоже обоснованы. Отсюда, используя аксиомную схему **C2Ar5**, легко получаются **T7** и **T8**.

T12. ${\sim}(S + P)e{\sim}({\sim}S \times {\sim}P)$ – обоснование ${\sim}(S + P) \leq ({\sim}S \times {\sim}P)$.

1.	$(S + P)e{\sim}(S + P)$	**C2Ar2**
2.	${\sim}(S + P)e(S + P)$	1, **T2**; **ЛВ**
3.	${\sim}(S + P)eS \ \& \ {\sim}(S + P)eP$	2, **C2Ar7**; **ЛВ**
4.	${\sim}(S + P)e{\sim}({\sim}S \times {\sim}P) \equiv {\sim}(S{+}P)e{\sim}{\sim}S \ \& \ {\sim}(S{+}P)e{\sim}{\sim}P$	**C2Ar9**
5.	${\sim}(S + P)e{\sim}({\sim}S \times {\sim}P) \equiv {\sim}(S + P)eS \ \& \ {\sim}(S + P)eP$	4; **ПП**
6.	${\sim}(S + P)e{\sim}({\sim}S \times {\sim}P)$	5, 3; **ЛВ**

T13. $({\sim}S \times {\sim}P)e{\sim}{\sim}(S + P)$ – обоснование $({\sim}S \times {\sim}P) \leq {\sim}(S + P)$.

1.	$({\sim}S \times {\sim}P)e{\sim}({\sim}S \times {\sim}P)$	**C2Ar2**
2.	$({\sim}S \times {\sim}P)e{\sim}{\sim}S \ \& \ ({\sim}S \times {\sim}P)e{\sim}{\sim}P$	1, **C2Ar9**; **ЛВ**
3.	$({\sim}S \times {\sim}P)eS \ \& \ ({\sim}S \times {\sim}P)eP$	2; **ПП**
4.	$({\sim}S \times {\sim}P)e(S + P)$	3, **C2Ar7**; **ЛВ**
5.	$({\sim}S \times {\sim}P)e{\sim}{\sim}(S + P)$	4, **T9**; **ПП**

Из теорем **T12** и **T13** выводится другой закон Де Моргана:

$${\sim}(S + P) = ({\sim}S \times {\sim}P).$$

T14. $(S + P) = (P + S)$ – коммутативность +.

1.	$(P + S)e{\sim}(P + S)$	**C2Ar2**
2.	${\sim}(P + S)e(P + S)$	1, **T2**; **ЛВ**

3.	$\sim(P + S)eP \& \sim(P + S)eS$	2, **C2Ar7**; **ЛВ**
4.	$\sim(P + S)eS \& \sim(P + S)eP$	3; **ЛВ**
5.	$\sim(S + P)e(S + P)$	4, **C2Ar7**; **ЛВ**
6.	$(S + P)e\sim(S + P)$	5, **T2**; **ЛВ**

Это доказывает $(S + P) \le (P + S)$. Аналогично доказывается $(P + S) \le (S + P)$, что и обосновывает теорему **T14**.

T15. $S \times P = P \times S$ – коммутативность $\times$.

1.	$(S \times P)e\sim(S \times P)$	**C2Ar2**
2.	$(S \times P)e\sim S \& (S \times P)e\sim P$	1, **C2Ar9**; **ЛВ**
3.	$(S \times P)e\sim P \& (S \times P)e\sim S$	2; **ЛВ**
4.	$(S \times P)e\sim(P \times S)$	3, **C2Ar9**; **ЛВ**

Это доказывает $S \times P \le P \times S$. Аналогично доказывается $P \times S \le S \times P$, что и обосновывает теорему **T15**.

T16. $S + (P + M) = (S + P) + M$ – ассоциативность $+$.

Для доказательства этой теоремы необходимо показать, что теоремами **C2Ar** являются формулы $(S + (P + M))e\sim((S + P) + M)$ и $((S + P) + M)e\sim(S + (P + M))$. Покажем это для первой формулы:

$(S + (P + M))e\sim((S + P) + M) \equiv_{T2} \sim((S + P) + M)e(S + (P + M)) \equiv_{C2Ar7} \sim((S + P) + M)eS \& \sim((S + P) + M)eP \& \sim((S + P) + M)eM$.

Последний член конъюнкции по **T12**, **T13** и **ПП** эквивалентен выражению $(\sim(S + P) \times \sim M)eM$, которое является частным случаем теоремы **T7**. Для первых же двух членов конъюнкции имеем:

$\equiv_{C2Ar7} \sim((S + P) + M)e(S + P) \equiv_{T12,\ T13,\ пп} (\sim(S + P) \times \sim M)e(S + P)$.

Последнее выражение является частным случаем теоремы **T8**. А в силу того, что при доказательстве $(S + (P + M))e\sim((S + P) + M)$ использовались только эквивалентные преобразования, ясно, что, повторяя эти шаги в обратном порядке, легко получить в качестве теоремы и формулу $((S + P) + M)e\sim(S + (P + M))$. Совместно обоснование в **C2Ar** этих двух утверждений завершает доказательство теоремы **T16**.

T17. $S \times (P \times M) = (S \times P) \times M$ – ассоциативность $\times$.

Для обоснования этой теоремы надо показать, что теоремами **C2Ar** являются формулы $(S \times (P \times M))e\sim((S \times P) \times M)$ и $((S \times P) \times M)e\sim(S \times (P \times M))$. Покажем это для первой формулы.

$(S \times (P \times M))e\sim((S \times P) \times M) \equiv_{C2Ar9} (S \times (P \times M))e\sim S \& (S \times (P \times M))e\sim P \& (S \times (P \times M))e\sim M \equiv_{C2Ar9,\ пп} (S \times (P \times M))e\sim S \& (S \times (P \times M))e\sim(P \times M)$.

Оба члена последней конъюнкции являются, соответственно, частными случаями теорем **T5** и **T6**. Повторением шагов в обратном порядке доказывается и формула $((S \times P) \times M)e\sim(S \times (P \times M))$, что и завершает обоснование **T17**.

T18. $S + (P \times M) = (S + P) \times (S + M)$ – дистрибутивность $+$ относительно $\times$.

а) $(S + (P \times M))e\sim((S + P) \times (S + M)) \equiv_{C2Ar9} (S + (P \times M))e\sim(S + P) \& (S + (P \times M))e\sim(S + M) \equiv_{T2,\ пп} \sim(S + P)e(S + (P \times M)) \& \sim(S + M)e(S + (P \times M)) \equiv_{C2Ar7} \sim(S + P)eS \& \sim(S + P)e(P \times M) \& \sim(S + M)eS \& \sim(S + M)e(P \times M) \equiv_{T12,\ T13,\ пп} (\sim S \times \sim P)eS \& (\sim S \times \sim P)e(P \times M) \& (\sim S \times \sim M)eS \& (\sim S \times \sim M)e(P \times M)$.

Первый и третий члены конъюнкции являются частными случаями теоремы **T8**. Для остальных двух членов продолжаем рассуждение:

$(\sim S \times \sim P)e(P \times M) \& (\sim S \times \sim M)e(P \times M) \equiv_{C2Ar8,\ пп} ((P \times M) \times \sim S)e\sim P \& ((P \times M) \times \sim S)e\sim M \equiv_{T15,\ T17,\ пп} (P \times (M \times \sim S))e\sim P \& ((\sim S \times P) \times M)e\sim M$.

Оба последних члена являются частными случаями теорем **T5** и **T6**, что и доказывает пункт а).

б) $((S + P) \times (S + M))e\sim(S + (P \times M)) \equiv_{T10,\ T11,\ пп} ((S + P) \times (S + M))e(\sim S \times \sim(P \times M)) \equiv_{C2Ar8} ((\sim S \times \sim(P \times M)) \times (S + P))e(S + M) \equiv_{C2Ar7} ((\sim S \times \sim(P \times M)) \times (S + P))eS \& (\sim S \times \sim(P \times M)) \times (S + P))eM$.

Первый член конъюнкции – теорема **C2Ar**, так как по ассоциативности он преобразуется в формулу $(\sim S \times (\sim(P \times M) \times (S + P)))eS$, являющуюся частным случаем **T7**. Второй член преобразуется далее:

$\equiv_{C2Ar8} (M \times (\sim S \times \sim(P \times M)))e(S + P) \equiv_{C2Ar7} (M \times (\sim S \times \sim(P \times M)))eS \& (M \times (\sim S \times \sim(P \times M)))eP$.

Первый член по **T15**, **T17**, **ПП** приводится к виду $(\sim S \times (\sim(P \times M) \times M))eS$ и оказывается частным случаем теоремы **T7**. Оставшийся член преобразуется так:

$\equiv_{T17,\ пп} ((M \times \sim S) \times \sim(P \times M))eP \equiv_{C2Ar8} (P \times (M \times \sim S))e\sim(P \times M) \equiv_{C2Ar9} (P \times (M \times \sim S))e\sim P \& (P \times (M \times \sim S))e\sim M \equiv_{T16,\ T17,\ пп} (P \times (M \times \sim S))e\sim P \& ((\sim S \times P) \times M)e\sim M$.

Оба последних члена являются, соответственно, частными случаями **T5** и **T6**. Тем самым теорема **T18** доказана.

T19. $S \times (P + M) = (S \times P) + (S \times M)$ – дистрибутивность $\times$ относительно $+$.

а) $(S \times (P + M))e{\sim}((S \times P) + (S \times M)) \equiv_{\text{T12, T13, пп}} (S \times (P + M))e(\sim(S \times P) \times \sim(S \times M)) \equiv_{\text{C2Ar6}} ((\sim(S \times P) \times \sim(S \times M)) \times S)e(P + M) \equiv_{\text{C2Ar7}} ((\sim(S \times P) \times \sim(S \times M)) \times S)eP \mathbin{\&} ((\sim(S \times P) \times \sim(S \times M)) \times S)eM \equiv_{\text{C2Ar8, T18, пп, пз}} (\sim(S \times M) \times (S \times P))e{\sim}(S \times P) \mathbin{\&} ((S \times M) \times \sim(S \times P))e{\sim}(S \times M)$.

Оба члена являются частными случаями, соответственно, **T6** и **T5**.

б) $((S \times P) + (S \times M))e{\sim}(S \times (P + M)) \equiv_{\text{C2Ar9}} ((S \times P) + (S \times M))e{\sim}S \mathbin{\&} ((S \times P) + (S \times M))e{\sim}(P + M) \equiv_{\text{T2}} {\sim}Se((S \times P) + (S \times M)) \mathbin{\&} \sim(P + M)e((S \times P)+(S \times M)) \equiv_{\text{C2Ar7}} {\sim}Se(S \times P) \mathbin{\&} {\sim}Se(S \times M) \mathbin{\&} \sim(P + M)e(S \times P) \mathbin{\&} \sim(P + M)e(S \times M)$.

Первые два члена после обращения по **T2** преобразуются в $(S \times P)e{\sim}S$ и $(S \times M)e{\sim}S$ – частные случаи теоремы **T5**. Оставшаяся часть преобразуется по законам Де Моргана в

$({\sim}P \times {\sim}M)e(S \times P) \mathbin{\&} ({\sim}P \times {\sim}M)e(S \times M) \equiv_{\text{C2Ar8, T16, T17, пп}} ((\sim M \times S) \times P)e{\sim}P \mathbin{\&} (M \times (S \times {\sim}P))e{\sim}M$.

Последние два члена являются частными случаями теорем **T6** и **T5**. Тем самым теорема **T19** доказана.

T20. $(S \times P) + P = P$ – поглощение для $\times$.

а) $((S \times P) + P)e{\sim}P \equiv_{\text{T2}} {\sim}Pe((S \times P) + P) \equiv_{\text{C2Ar9}} {\sim}Pe(S \times P) \mathbin{\&} {\sim}PeP \equiv_{\text{T2}} (S \times P)e{\sim}P \mathbin{\&} Pe{\sim}P$.

Первый член – теорема **T6**, а второй – частный случай **C2Ar2**.

б) $Pe{\sim}((S \times P) + P) \equiv_{\text{T16, T11, пп}} Pe(\sim(S \times P) \times {\sim}P) \equiv_{\text{T2}} (\sim(S \times P) \times {\sim}P)eP$.

Последняя формула – частный случай **T7**. Тем самым теорема **T20** доказана. Аналогично ведется доказательство теоремы

T21. $(S + P) \times P = P$ – поглощение для $+$.

T22. $(S \times {\sim}S) + P = P$ – закон противоречия.

а) $((S \times {\sim}S) + P)e{\sim}P \equiv_{\text{T2}} {\sim}Pe((S \times {\sim}S) + P) \equiv_{\text{C2Ar9}} {\sim}Pe(S \times {\sim}S) \mathbin{\&} {\sim}PeP \equiv_{\text{T2}} (S \times {\sim}S)e{\sim}P \mathbin{\&} Pe{\sim}P \equiv_{\text{C2Ar8}} ({\sim}P \times S)e{\sim}S \mathbin{\&} Pe{\sim}P$.

Оба члена конъюнкции являются теоремами системы **C2Ar**.

б) $Pe{\sim}((S \times {\sim}S) + P) \equiv_{\text{T18, T11, пп}} Pe(\sim(S \times {\sim}S) \times {\sim}P) \equiv_{\text{T2}} (\sim(S \times {\sim}S) \times {\sim}P)eP$.

Последняя формула – частный случай **T7**. Это доказывает **T22**.

T23. $(S + {\sim}S) \times P = P$ – закон исключенного третьего.

а) $((S+{\sim}S) \times P)e{\sim}P$ – частный случай **T6**.

б) $Pe{\sim}((S + {\sim}S) \times P) \equiv_{\text{C2Ar9}} Pe{\sim}(S + {\sim}S) \mathbin{\&} Pe{\sim}P \equiv_{\text{T18, T11, пп}} Pe({\sim}S \times S) \mathbin{\&} Pe{\sim}P \equiv_{\text{T2, пп}} ({\sim}S \times {\sim}{\sim}S)eP \mathbin{\&} Pe{\sim}P \equiv_{\text{C2Ar8}} \equiv (P \times {\sim}S)e{\sim}{\sim}S \mathbin{\&} Pe{\sim}P$.

Члены конъюнкции – теоремы **C2Ar**. **Метатеорема 2** *доказана.*

Лемма 2.
Для любых терминов S, P, $K^*(S)$ *справедлив принцип экстенсиональности*:

$$(\text{ПЭ})\ (S = P) \supset (K^*(S) = K^*(P)).$$

Доказательство леммы ведется математической индукцией по *глубине вхождения термина* S *в термин* (*контекст*) $K^*(S)$. Понятие глубины вхождения определяется индуктивно:

1) *отдельно стоящий примитивный термин имеет глубину* 0,
2) *если в контексте* $K^*(S)$ *термин* S *имеет глубину* n, *то в контекстах* ${\sim}K^*(S)$, $(K^*(S) \times \gamma)$, $(K^*(S) + \gamma)$ *его глубина* $n+1$.

Для контекстов глубины 0 принцип экстенсиональности очевиден, так как в этом случае имеет место: если $S = P$, то $P = P$. По предположению индукции допустим далее, что **ПЭ** выполняется для контекстов глубины $n - 1$. Обозначим такой контекст посредством $\Phi(S)$. Тогда контекст $K^*(S)$ глубины n есть либо ${\sim}\Phi(S)$, либо $(\Phi(S) \times \gamma)$, либо $(\Phi(S) + \gamma)$. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай 1. $K^*(S) = {\sim}\Phi(S)$.

Допустим, что $S = P$ и $K^*(S) \neq K^*(P)$). По предположению индукции $\Phi(S) = \Phi(P)$, т.е.согласно переводящей функции δ_1: $\Phi(S)e{\sim}\Phi(P) \mathbin{\&} \Phi(P)e{\sim}\Phi(S)$. В то же время имеем $\neg(K^*(S)e{\sim}K^*(P) \mathbin{\&} K^*(P)e{\sim}K^*(S))$, (из условия $K^*(S) \neq K^*(P)$), что дает $(K^*(S)i{\sim}K^*(P) \vee K^*(P)i{\sim}K^*(S))$. Рассмотрим случай $K^*(S)i{\sim}K^*(P)$, который равнозначен случаю ${\sim}K^*(S)i{\sim}{\sim}K^*(P)$. Последнее эквивалентно по **T9** и **ПП** ${\sim}\Phi(S)i\Phi(P)$. Частным случаем аксиомной схемы **C2Ar3** является $\Phi(P)e{\sim}\Phi(S) \mathbin{\&} {\sim}\Phi(S)i\Phi(P) \supset {\sim}\Phi(S)i{\sim}{\sim}\Phi(S)$. Отсюда следует ${\sim}\Phi(S)i{\sim}{\sim}\Phi(S)$ (по *modus* *ponens*), что эквивалентно $\neg{\sim}\Phi(S)e{\sim}{\sim}\Phi(S)$. Но в **C2Ar** доказывается утверждение ${\sim}\Phi(S)e{\sim}{\sim}\Phi(S)$, и мы получаем противоречие. Аналогично показывается противоречивость случая $К^*(P)i{\sim}К^*(S)$.

Случай 2. $К^*(S) = (\mathbf{\Phi}(S) \times \gamma)$.

Допустим опять, что $S = P$ и $К^*(S) \neq К^*(P)$). По индуктивному допущению $\Phi(S) = \Phi(P)$, т.е. $\Phi(S)e{\sim}\Phi(P)\ \&\ \Phi(P)e{\sim}\Phi(S)$. Условие о неравенстве контекстов $К^*(S)$ и $К^*(P)$ равносильно утверждению $\neg(К^*(S)e{\sim}К^*(P)\ \&\ К^*(P)e{\sim}К^*(S))$, т.е. $(К^*(S)i{\sim}К^*(P) \vee К^*(P)i{\sim}К^*(S))$.

Рассмотрим случай $К^*(S)i{\sim}К^*(P)$, который равнозначен случаю $(\Phi(S) \times \gamma)i{\sim}(\Phi(P) \times \gamma)$.

Возьмем аксиомную схему **C2Ar9** и поставим слева и справа от знака эквиваленции знак отрицания. Применяя далее **D1** и логику высказываний, получаем в качестве теоремы выражение:

T24. $Si{\sim}(P \times M) \equiv Si{\sim}P \vee Si{\sim}M$.

Беря частный случай этой теоремы, будем иметь $(\Phi(S) \times \gamma)i{\sim}(\Phi(P) \times \gamma) \equiv (\Phi(S) \times \gamma)i{\sim}\Phi(P) \vee (\Phi(S) \times \gamma)i{\sim}\gamma$. Последний член дизъюнкции противоречив, так как он эквивалентен $\neg(\Phi(S) \times \gamma)e{\sim}\gamma$, но в **C2Ar** доказуемо утверждение $(\Phi(S) \times\gamma)e{\sim}\gamma$. Чтобы показать противоречивость первого члена дизъюнкции возьмем частный случай **C2Ar3** в форме $({\sim}\Phi(P)e\Phi(S)\ \&\ (\Phi(S) \times \gamma)i{\sim}\Phi(P)) \supset (\Phi(S) \times \gamma)i{\sim}\Phi(S)$. Второй конъюнктивный член в антецеденте данной импликации является первым членом рассматриваемой дизъюнкции. Первый же конъюнктивный член в антецеденте получен из рассмотренного выше выражения $\Phi(S)e{\sim}\Phi(P)\ \&\ \Phi(P)e{\sim}\Phi(S)$ за счет обращения высказывания типа *e*. Отсюда по *modus ponens* получаем $(\Phi(S) \times \gamma)i{\sim}\Phi(S)$, т.е. $\neg(\Phi(S) \times \gamma)e{\sim}\Phi(S)$, но в **C2Ar** доказуемо $(\Phi(S) \times \gamma)e{\sim}\Phi(S)$, что ведет к противоречию.

Аналогично рассматривается и случай $К^*(P)i{\sim}К^*(S)$).

Случай 3. $К^*(S) = (\mathbf{\Phi}(S) + \gamma)$.

Допустим, что $S = P$ и $К^*(S) \neq К^*(P)$). По индуктивному допущению из $S = P$ следует $\Phi(S) = \Phi(P)$, т.е. $\Phi(S)e{\sim}\Phi(P)\ \&\ \Phi(P)e{\sim}\Phi(S)$. С другой стороны, неравенство $К^*(S)$ и $К^*(P)$ означает, что $\neg(К^*(S)e{\sim}К^*(P)\ \&\ К^*(P)e{\sim}К^*(S))$ или $(К^*(S)i{\sim}К^*(P) \vee К^*(P)i{\sim}К^*(S))$. Рассмотрим случай $К^*(S)i{\sim}К^*(P)$, который по **T1** эквивалентен ${\sim}К^*(P)iК^*(S)$ и графически совпадает с ${\sim}(\Phi(P) + \gamma)i(\Phi(S) + \gamma)$. Возьмем аксиомную схему **C2Ar7** и подставим слева и справа от знака эквиваленции отрицание. Применяя **D1** и логику высказываний, получаем:

T25 $Si(P + M) \equiv (SiP \vee SiM)$.

Возьмем частный случай этой теоремы в форме ${\sim}(\Phi(P) + \gamma)i(\Phi(S) + \gamma) \equiv {\sim}(\Phi(P) + \gamma)i\Phi(S) \vee {\sim}(\Phi(P) + \gamma)i\gamma \equiv_{\text{T12, T13, ЛВ}} ({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)i\Phi(S) \vee ({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)i\gamma$. Второй член дизъюнкции противоречив, так как он эквивалентен формуле $\neg({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)e\gamma$, но в **C2Ar** доказуемо $({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)e\gamma$. Чтобы показать противоречивость первого члена, возьмем частный случай аксиомной схемы **C2Ar3**: $\Phi(S)e{\sim}\Phi(P)\ \&\ ({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)i\Phi(S) \supset ({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)i{\sim}{\sim}\Phi(P)$. По *modus ponens* отсюда следует $({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)i{\sim}{\sim}\Phi(P) \equiv_{\text{T9, ЛВ}} ({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)i\Phi(P) \equiv_{\text{D1}} \neg({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)e\Phi(P)$, но в **C2Ar** доказуемо утверждение $({\sim}\Phi(P) \times {\sim}\gamma)e\Phi(P)$.

Аналогично рассматривается случай $К^*(P)i{\sim}К^*(S)$.

На этом завершается доказательство **Леммы 2**, а тем самым обосновывается принцип подстановочности равного равным в общем виде, т.е. теперь можно снять ограничение, наложенное ранее, согласно которому термин S должен был совпадать либо с субъектом, либо предикатом элементарной формулы. Теперь термин S может быть и частью субъекта или предиката. Таким образом, *доказательство* **Метатеоремы 2** *завершено*.

Для дальнейших рассуждений важны следующие теоремы **C2Ar**:

T26. $Si1 \equiv SaS$,
T27. $(Se{\sim}P\ \&\ SaS) \equiv SaP$,
T28. $0eS$,
T29. $(S \times P)iM \equiv (M \times S)iP$,
T30. $Se1 \equiv SoS$,
T31. $(Si{\sim}P \vee SoS) \equiv SoP$,

доказательство которых мы опускаем. Кроме того, будем далее свободно пользоваться всеми булевыми соотношениями, так как выше все они были обоснованы.

Метатеорема 3.

$$\mathbf{C2Ar} \vdash (\mathbf{A} \equiv \delta_1(\delta_2(\mathbf{A}))).$$

Метатеорема доказывается математической индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**. Базис индукции содержит два случая.

I. $\mathbf{A} = SaP$.

$\delta_1(\delta_2(SaP)) = \delta_1(S \times P = S\ \&\ S > 0) = \delta_1(S \times P = S)\ \&\ \delta_1(S > 0) \equiv (S \times P)e{\sim}S\ \&\ Se{\sim}(S \times P)\ \&\ 0e{\sim}S\ \&\ \neg Se{\sim}0$.

Первый и третий члены являются частными случаями, соответственно, теорем **T5** и **T28**, а потому могут быть устранены. Оставшееся выражение преобразуется далее следующим образом.

$Se{\sim}(S \times P)\ \&\ \neg Se{\sim}0 \equiv_{\text{T38, T11, пп}} Se(\sim S + \sim P)\ \&\ \neg Se{\sim}0 \equiv_{\text{D1, пп}}$ $Se(\sim S + \sim P)\ \&\ Si{\sim}0 \equiv_{\text{C2Ar7}} Se{\sim}S\ \&\ Se{\sim}P\ \&\ Si{\sim}0$.

Так как $Se{\sim}S$ – аксиомная схема **C2Ar2**, преобразования продолжаются так:

$Se{\sim}P\ \&\ Si{\sim}0 \equiv_{\text{пп}} Se{\sim}P\ \&\ Si1 \equiv_{\text{T36}} Se{\sim}P\ \&\ SaS \equiv_{\text{T25}} SaP$.

II. A $\equiv SiP$.

$\delta_1(\delta_2(SiP)) = \delta_1(S \times P > 0) \equiv 0e{\sim}(S \times P)\ \&\ \neg(S \times P)e{\sim}0 \equiv_{\text{T28}} \neg(S \times P)e{\sim}0 \equiv_{\text{D4, пп}} (S \times P)i{\sim}0 \equiv_{\text{T29}} (\sim 0 \times S)iP \equiv_{\text{пп}} (1 \times S)iP \equiv_{\text{пп}} SiP$.

Индуктивные шаги доказываются тривиально. На этом завершается доказательство **Метатеоремы 3**, которая совместно с **Метатеоремой 1** устанавливает, что **C2Ar** погружается в булеву алгебру.

Метатеорема 4. БА $\vdash$ (**A** $\equiv \delta_2(\delta_1(\mathbf{A}))$).

I. A $\equiv S = P$.

$\delta_2(\delta_1(S = P)) = \delta_2(Se{\sim}P\ \&\ Pe{\sim}S) = \delta_2(Se{\sim}P)\ \&\ \delta_2(Pe{\sim}S) \equiv (S \times \sim P = 0\ \&\ P \times \sim S = 0) \equiv$ (по определению псевдодополнения) $\sim P \leq \sim S\ \&\ \sim S \leq \sim P \equiv$ (по контрапозиции) $S \leq P\ \&\ P \leq S \equiv$ (по определению $=$) $S = P$.

II. A $\equiv S \leq P$.

$\delta_2(\delta_1(S \leq P)) = \delta_2(Se{\sim}P) \equiv (S \times \sim P = 0) \equiv$ (по определению псевдодополнения) $\sim P \leq \sim S \equiv$ (по контрапозиции) $S \leq P$.

III. A $\equiv S < P$.

$\delta_2(\delta_1(S < P)) = \delta_2(Se{\sim}P\ \& \neg Pe{\sim}S) = \delta_2(Se{\sim}P)\ \& \neg\delta_2(Pe{\sim}S) \equiv (S \times \sim P = 0\ \& \neg(P \times \sim S = 0)) \equiv$ (по определению псевдодополнения) $\sim P \leq \sim S\ \&$ $\neg(\sim S \leq \sim P) \equiv$ (по контрапозиции) $(S \leq P\ \&\ \neg(P \leq S)) \equiv$ (по определению $<$) $= S < P$.

В силу тривиальности мы опускаем обоснования индуктивных шагов. На этом завершается доказательство **Метатеоремы 4**, которая совместно с **Метатеоремой 2** демонстрирует, что булева алгебра погружается в силлогистику.

Итак, булева алгебра и силлогистика **C2Ar** – дефиницально эквивалентные системы. Иначе говоря, они описывают один и тот же абстрактный объект и устанавливают одинаковые соотношения, т.е. несут одну и ту же информацию, выраженную, правда, различными языковыми средствами. Как уже говорилось, **C2Ar** содержит в качестве

фрагмента систему **C2** В.А. Смирнова, которую мы атрибутируем Аристотелю. Поэтому **C2Ar** можно рассматривать как естественное распространение семантических соображений, положенных Аристотелем в основу своей позитивной и негативной силлогистик, на силлогистику со сложными терминами.

В **C2Ar** доказуемы также следующие теоремы:

T32. $SaP\ \&\ SaM \equiv Sa(P \times M)$,
T33. $SaP \supset (S \times P)aP$,
T34. $SaP \equiv Sa(S \times P)$,
T35. $(S \times P)aM \supset Sa(\sim P + M)$,
T36. $SaP\ \&\ MaP \supset (S + M)aP$,
T37. $SaP\ \&\ SaM \supset Sa(P + M)$,
T38. $SeP \supset (S \times P)eM$,
T39. $(S \times P)iM \supset SiP\ \&\ SiM\ \&\ PiM$,
T40. $So(P \times M) \equiv SoP \vee SoM$,
T41. $SaS\ \&\ PaP \supset (S + P)a(S + P)$,
T42. $(S \times P)a0 \supset SeP$,
T43. $SaP \supset 1a(\sim S + P)$.

Из приведенного списка теорем наглядно становится различие, которое имеется между формами $(S \times P)aM$ и $Sa(P \times M)$. Если для последней формы верна теорема **T32**, то для первой не проходит ни $(S \times P)aM \supset (SaM\ \&\ PaM)$, ни $(SaM\ \&\ PaM) \supset (S \times P)aM$. Некоторая асимметрия существует и для форм $Sa(P + M)$ и $(S + P)aM$, относительно которых выполняется **T36** и **T37**. При этом, **T36** можно обнаружить у Аристотеля в 23-й главе второй книги «Первой Аналитики», где обсуждается проблема индукции.

Очень любопытна ситуация с теоремами **T33** и **T34**. А. Прайор в [81] со ссылкой на безымянных античных и средневековых авторов приводит мнение, что высказывание «Каждый человек белый» эквивалентно «Каждый человек есть белый человек». Это совпадает с **T34**, правая часть которой трактуется как результат ограничения предиката субъектом. В то же время ими не принималась импликация **T33**, когда, наоборот, предикат ограничивает субъект. Основание к этому они видели в том, что в выражении $SaP \supset (S \times P)aP$ консеквент является всегда истинным утверждением, в то время как антецедент («Каждый человек белый») – ложным.

Это говорит о глубоком расхождении в понимании логики между Аристотелем и указанными авторами. Прежде всего оно касается трактовки высказываний типа *a*, ибо, как было показано при анализе вопроса о силлогистическом тождестве, предложение $(S \times P)aP$ вовсе не является для Стагирита аналитически истинным. Напротив, оно фактуально и может быть либо истинным, либо ложным. Второй пункт расхождения касается принципа «ложь влечет все, что угодно». Аристотель, специально исследовав этот вопрос применительно к силлогистике, уверен, что из ложных посылок могут вытекать как ложные, так и истинные заключения, а поэтому доказательство в **С2Ar** теоремы **Т33** находится в достаточно хорошем согласии с концепцией Аристотеля.

У Прайора есть еще один интересный момент, связанный с анализом силлогистики со сложными терминами. Он обращает внимание на различие, которое проводил Псевдо-Скотт относительно двух типов рассуждений:

$$SiP,\ SiM \vdash MiP, \qquad Si(P \times M) \vdash MiP.$$

Первое из них, естественно, является неверным, так как такого модуса в III фигуре нет (P и M раздельно сказываются об S). Рассуждение же второго типа Псевдо-Скотт трактует как правильное. Это еще раз говорит о значительном различии совместного и раздельного сказывания. Доказуемость второго утверждения в **С2Ar** легко можно продемонстрировать, используя **Т39**.

Что касается других утверждений со сложными терминами, то Де Морган, например, рассматривал и принимал следующие законы:

(1) $(S \times P)\mathbf{e}(M \times R) \supset (S \times P \times M)\mathbf{e}R$,
(2) $(S \times P)\mathbf{a}M \supset S\mathbf{a}({\sim}P + M)$,
(3) $S\mathbf{a}(P + M) \supset (S \times {\sim}P)\mathbf{a}M$,
(4) $S\mathbf{a}P \equiv 1\mathbf{a}({\sim}S + P)$,
(5) $(S \times P)\mathbf{a}0 \equiv S\mathbf{e}P$.

В **С2Ar** теоремами являются (1) и (2). Формулы (4) и (5) верны лишь в одну сторону (**Т43**, **Т42**). Формула же (3) вообще не является теоремой. Причина всех этих расхождений состоит в различном понимании смысла высказываний типа $\mathbf{a}$, относительно которых Де Морган принимает условия истинности фундаментальной силлогистики, что не согласуется с точкой зрения Аристотеля.

Легко можно показать, что присоединение закона силлогистического тождества $S\mathbf{a}S$ к **С2Ar** ведет к противоречивости системы. Действительно:

1.	$\vdash (S \times {\sim}S)\mathbf{a}(S \times {\sim}S)$	частный случай $S\mathbf{a}S$
2.	$\vdash (S \times {\sim}S)\mathbf{a}S \ \&\ (S \times {\sim}S)\mathbf{a}{\sim}S$	1, **Т32**
3.	$\vdash (S \times {\sim}S)\mathbf{a}S$	2, **ЛВ**
4.	$\vdash (S \times {\sim}S)\mathbf{i}S$	3, **Т3**
5.	$\vdash 0\mathbf{i}S$	4, опред. 0
6.	$\vdash \neg 0\mathbf{e}S$	5, опред. $\mathbf{e}$.

что противоречит **Т28** и делает **С2Ar** противоречивой системой.

В связи с полученным результатом возникает вопрос о возможности осуществления аналогичных расширений систем чистой позитивной силлогистики, выражающие иные интерпретации категорических высказываний. Ответ на данный вопрос для некоторых силлогистических теорий является положительным.

В.И. Маркиным [36] была построена система расширенной силлогистики на основе чистой фундаментальной силлогистики **СФ** (см. §1 Главы III). Она получается за счет присоединения к дедуктивным постулатам **СФ** дополнительных схем аксиом:

Р1. $S\mathbf{a}P \equiv S\mathbf{e}{\sim}P$, **Р3**. $M\mathbf{e}(S + P) \equiv (M\mathbf{e}S \ \&\ M\mathbf{e}P)$,
Р2. $(S \times P)\mathbf{e}M \supset (M \times S)\mathbf{e}P$, **Р4**. $M\mathbf{a}(S \times P) \equiv (M\mathbf{a}S \ \&\ M\mathbf{a}P)$.

Данное исчисление дефиниционально эквивалентно булевой алгебре. Подробное доказательство этого утверждения было изложено А.С. Блинковым в дипломной работе, защищенной в 2006 г. на философском факультете МГУ по кафедре логики.

Другими системами, которые допускают подобное расширение, являются силлогистические теории Больцано и Кэрролла. Что касается традиционной силлогистики, т.е. системы **С4** (синонимично – системы Я. Лукасевича), то для нее подобное расширение сомнительно.

§ 2. Кванторная силлогистика и онтология Лесневского

В предыдущих параграфах силлогистические теории строились на базе классической пропозициональной логики. Теперь мы переходим к рассмотрению силлогистических систем, которые основываются на более мощном аппарате – теории квантификации. Язык подобного рода теорий будет содержать не только пропозициональные связки, но и кванторы, используемые для квантификации универсалий, которые выступают здесь в роли переменных.

Ниже описывается *позитивная* (без сложных терминов) *кванторная силлогистика*, которую мы называем системой **С2К**. Она была предложена В.А. Бочаровым [9], который установил ее взаимосвязь с *элементарной онтологией* Лесневского (последняя подробно изложена в [84]).

В язык **С2К** вводится квантор общности $\forall$, а единственной силлогистической константой в нем является константа $\mathbf{a}$. Понятие формулы определяется теперь следующим образом:

1. Если S и P – универсалии, то $S\mathbf{a}P$ является формулой;
2. Если **А** – формула, то $\neg$**А** – формула;

3. Если **A** и **B** – формулы, то (**A** & **B**), (**A** $\vee$ **B**), (**A** $\supset$ **B**), (**A** $\equiv$ **B**) – формулы;
4. Если **A** – формула, а S – универсалия, то $\forall S$**A** – формула;
5. Ничто иное не является формулой.

Исчисление содержит, кроме схем аксиом исчисления предикатов, следующие силлогистические аксиомные схемы:

K1. $SaP \equiv \forall Q(QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS)$,
K2. $SaS \supset \exists Q(1(Q)\ \&\ QaS)$,
K3. $\forall Q(\forall R(1(R)\ \&\ RaS \supset RaP) \supset (QaS \supset QaP))$,

правилами же вывода являются *modus ponens* и *генерализация*.

По определению вводятся следующие константы:

D1. $1(Q) \equiv \forall P(PaQ \supset QaP)$, **D3**. $SeP \equiv \neg SiP$,
D2. $SiP \equiv \exists Q(QaS\ \&\ QaP)$, **D4**. $SoP \equiv \neg SaP$.

Отметим, что в силу эквивалентности аксиоматического и натурального исчислений предикатов мы будем в дальнейшем широко использовать последнее исчисление в качестве дедуктивного средства анализа силлогистической системы.

Силлогистика **C2K** выглядит весьма необычно, потому подробно остановимся на ее особенностях.

Универсалиям, как об этом неоднократно говорилось выше, в классической логике предикатов соответствуют одноместные предикаторы, т.е. знаки свойств. Поэтому их квантификация, согласно общепринятому положению дел, должна реализовываться во второпорядковом исчислении предикатов. Однако, так как в **C2K** нет индивидных переменных, а единственными переменными являются универсалии, мы, вообще говоря, можем смотреть на эту кванторную силлогистику как на первопорядковое исчисление. Ниже этот взгляд будет обоснован еще одним аргументом, исходящим из теории семантических категорий Лесневского.

В качестве исторической справки укажем, что первая весьма неудачная попытка квантификации субъектов и предикатов категорических высказываний была предпринята У. Гамильтоном [75]. Так, принятие им высказывания вида «Всякий S есть всякий P» означало – при обычном разделительном понимании слова «всякий», – что универсум рассуждения содержит ровно один предмет, так как именно в этом случае данная высказывательная форма оказывается истинной. Квантифицировал субъекты и предикаты силлогистических выражений и Лесневский, который в рамках своей онтологии вводил по определению силлогистические константы, используя для этого формулы с квантификацией силлогистических терминов. Значительная работа в построении различных вариантов кванторных силлогистик была проделана Ч. Лейевским [79].

Аксиомная схема **K1** представляет собой модифицированный и записанный в виде второпорядковой формулы стандартный перевод высказываний типа ***a*** для **C2** в исчисление предикатов, который неоднократно рассматривался в предыдущих главах книги. С содержательной точки зрения различие состоит в том, что если в выражении $SaP \Rightarrow \forall x(Sx \supset Px)\ \&\ \exists xSx$, задающем стандартный перевод, квантификация осуществляется по индивидным переменным и правая часть при экстенсиональной трактовке означает: «всякий индивид x, принадлежащий классу S, принадлежит также и классу P и существует индивид x, принадлежащий классу S», то в аксиомной схеме **K1** – $SaP \equiv \forall Q(QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS)$ – квантификация осуществляется по классам (свойствам) и правая часть теперь означает: «всякий класс Q, включенный в класс S, включается и в класс P и имеется класс Q, который включен в класс S». При этом отношение включения класса S в класс P определяется условием $\forall x(Sx \supset Px)\ \&\ \exists xSx$ и может быть названо *аристотелевским включением*. Оно имеет место для непустых классов. Данная ограниченная трактовка отношения включения не влияет на универсальную общезначимость аксиомной схемы **K1**, которая остается истинным утверждением при любых значениях универсалий S и P – пустых и непустых классах. Просто при пустых S и P левая и правая части эквиваленции оказываются ложными, но тем самым вся эквиваленция остается истинной.

Очень интересным является тот факт, что аксиомную схему **K1** можно трактовать как аналог так называемой *аксиомы силлогизма*. О последней велись рассуждения еще в период схоластической логики и утверждалось, что из аксиомы силлогизма вытекает вся силлогистика. Действительно, как будет показано ниже, этой единственной аксиомы, а также, конечно, определений высказывательных форм SoP, SiP и SeP достаточно, чтобы получить систему **C2**.

Аксиомная схема (схема атомности) **K2** задает условия непустоты универсалии S. Согласно этому условию, если класс S непуст, то найдется такой единичный класс Q (об этом говорит член $1(Q)$), который включается в S. Определение **D1** поясняет, как следует понимать выражение $1(Q)$: класс Q является не более чем одноэлементным, если и только если для этого класса справедлива определяющая часть дефиниции. В частном случае, если $Q \neq \varnothing$, то Q есть одноэлементное множество, а термин «Q» по существу является сингулярным термином. Аксиома атомности, таким образом, утверждает, что каждый непустой класс S содержит по крайней мере один атом.

В предыдущих главах указывалось, что сингулярные термины могут по разному вводится в язык силлогистики. Существуют, с одной стороны, аристотелевский и оккамовский способы, основанные на принятии теории семантических категорий расселовского типа, и, с другой стороны, способ Лесневского. Суть различия состоит в следующем. В расселовской теории семантических категорий общие и индивидные термины относят к различным семантическим типам: первые – к одноместным высказываниеобразующим функторам, а вторые – к именам. Первые репрезентируют свойства (классы) предметов, в то время как вторые являются знаками индивидов. Такое семантическое различие находит свое отражение в языках расселовского типа уже в том, что на уровне задания алфавита происходит разделение этих терминов путем введения разных обозначений для сингулярных и общих терминов. Именно так мы и поступали при рассмотрении сингулярных силлогистик в аристотелевском и оккамовском языках.

В соответствии с таким подходом Рассел требовал строгого различения трех смыслов употребления связки «есть» в предложениях естественного языка – $\in$, $\subseteq$ и $=$, называя «позором человеческой мысли» то, что в доматематической логике (читай – силлогистике) это различие не проводилось. Истолкование конструкции «S есть P» естественного языка, согласно концепции Рассела, прямо зависит от того, какие термины стоят на местах S и P. Так, если S и P – единичные термины, то выражение «S есть P» понимается как тождество $S = P$. Если на месте S стоит сингулярный, а на месте P – общий термин, то выражение «S есть P» понимается как $S \in P$. Наконец, если S и P – общие термины, то «S есть P» трактуется как отношение включения: $S \subseteq P$.

Ст. Лесневский принял иную, отличную от расселовской теорию семантических категорий, в которой общие, сингулярные и пустые термины, рассматриваемые с обычных лингвистических позиций как именующие, помещаются в единую категорию – категорию имен. Лесневский опирался при этом на то обстоятельство, в четкой форме отмеченное Е. Слупецким, что в естественных языках, в которых отсутствуют артикли (латинский, русский, польский и др.) не удается лингвистически различить указанные выше три расселовских употребления связки «есть», а потому в этих языках пустые, единичные и общие термины категорно-семантически тождественны. Такая позиция, в частности, особо ярко проявлялась в многовековом изложении

силлогистики в учебниках по логике. Используя эту традицию, Лесневский отождествляет индивидные имена, обозначающие некоторый предмет, скажем $\mathbf{d}$, и универсалию $\{\mathbf{d}\}$, т.е. принимает равенство $\mathbf{d} = \{\mathbf{d}\}$. В формальной системе, основанной на подобной теории семантических категорий, нельзя уже синтаксически развести сингулярные и общие термины, введя для них, например, различные обозначения. Подобное разделение возможно лишь внутри самой логической системы с использованием специальных дедуктивных средств.

Весьма необычной является аксиомная схема **К3**. Она устанавливает связь между двумя способами введения отношения включения: в одном случае это делается стандартным образом через отношение принадлежности элемента классу, в другом же – посредством указания на включение класса в класс.

Докажем теперь заявленное выше утверждение, что **С2К** содержит в качестве фрагмента чистую позитивную силлогистику **С2**.

Т1. $MaP \,\&\, SaM \supset SaP$ (*Barbara*)

1.	$MaP \,\&\, SaM$	допущение
2.	MaP	1; **ЛВ**
3.	SaM	
4.	$\forall Q(QaM \supset QaP) \,\&\, \exists Q(QaM)$	2, **К1**
5.	$\forall Q(QaS \supset QaM) \,\&\, \exists Q(QaS)$	3, **К1**
6.	$\forall Q(QaM \supset QaP)$	4; **ЛВ**
7.	$\forall Q(QaS \supset QaM)$	5; **ЛВ**
8.	$\exists Q(QaS)$	
9.	$\forall Q(QaS \supset QaP)$	7, 6; **ЛП**
10.	$\forall Q(QaS \supset QaP) \,\&\, \exists Q(QaS)$	9, 8; **ЛВ**
11.	SaP	10, **К1**

Т2. $MeP \,\&\, SaM \supset SeP$ (*Celarent*)

1.	$MeP \,\&\, SaM$	допущение
2.	MeP	1; **ЛВ**
3.	SaM	
4.	$\forall Q(QaM \supset \neg QaP)$	2, **D3**, **D2**; **ЛП**
5.	$\forall Q(QaS \supset QaM) \,\&\, \exists Q(QaS)$	3, **К1**
6.	$\forall Q(QaS \supset QaM)$	5; **ЛВ**
7.	$\forall Q(QaS \supset \neg QaP)$	6, 4; **ЛП**
8.	SeP	7, **D2**, **D3**; **ЛП**

Т3. $SiP \supset PiS$ (*i-обращение*),

T4. $SeP \supset PeS$ (*e-обращение*),
T5. $SaP \supset SiP$ (*a-подчинение*).

Доказательства этих теорем опускаются в силу их простоты.

T6. $SiP \supset SaS$ (*ограниченный закон тождества*)

1.	SiP	допущение
2.	$\exists Q(QaS \,\&\, QaP)$	1, **D2**
3.	$MaS \,\&\, MaP$	2; $\exists_{\text{и}}$ M абс. огр.
4.	MaS	3; **ЛВ**
5.	$\exists Q(QaS)$	4; $\exists_{\text{в}}$
6.	$QaS \supset QaS$	закон **ЛВ**
7.	$\forall Q(QaS \supset QaS)$	7; $\forall_{\text{в}}$, Q абс. огр.
8.	$\forall Q(QaS \supset QaS) \,\&\, \exists Q(QaS)$	7, 5; **ЛВ**
9.	SaS	8, **K1**

Доказуемость в **C2K** аксиом вида $SeP \equiv \neg SiP$ и $SoP \equiv \neg SaP$ системы **C2** очевидно ввиду определений **D3** и **D4**. Тем самым, все аксиомные схемы **C2** доказуемы в **C2K**.

Перейдем к краткому изложению логической теории, которая известна как *онтология Лесневского*. Чтобы получить сингулярную систему в смысле Лесневского, т.е. получить систему, в которой мы могли бы некоторые термины трактовать как сингулярные, необходимо каким-то образом в общей массе всех терминов уметь выделять именно сингулярные. У Лесневского эта цель достигается посредством принятия *аксиомы онтологии*, задающей смысл фундаментальному выражению этой теории $S\varepsilon P$:

$$S\varepsilon P \equiv \exists Q(Q\varepsilon S) \,\&\, \forall M\forall R((M\varepsilon S \,\&\, R\varepsilon S) \supset M\varepsilon R) \,\&\, \forall Q(Q\varepsilon S \supset Q\varepsilon P).$$

Данное выражение является *единственной* аксиомой онтологии и справедливо при подстановке вместо S и P любых имен (имен в смысле теории семантических категорий Лесневского) – сингулярных и универсальных, пустых и непустых. Но выражение $S\varepsilon P$ будет истинным только тогда, когда на месте S стоит сингулярный термин и его экстенсионал (значение) включается в экстенсионал термина P. Об этом говорит правая часть эквиваленции, где выражение $\exists Q(Q\varepsilon S)$ указывает на непустоту S, выражение $\forall M\forall R((M\varepsilon S \,\&\, R\varepsilon S) \supset M\varepsilon R)$ – на сингулярность S, а $\forall Q(Q\varepsilon S \supset Q\varepsilon P)$ несет информацию об отношении экстенсионалов S и P. Таким образом, выделение сингулярных терминов осуществляется не в алфавите, а за счет дедуктивных средств.

Кроме распределения языковых символов по семантическим категориям важное значение имеет и их подразделение по уровням или порядкам. Любой функтор, все аргументы которого являются выражениями, принадлежащими категории имен, называется функтором первого порядка. Функтором порядка n называется любой функтор, аргументы которого являются выражениями либо принадлежащими категории имен, либо категории функторов, чей порядок не выше n-1; при этом по крайней мере один из аргументов фиктора порядка n является функтором порядка n-1. Функторы любого уровня могут быть как высказываниеобразующими, так и имяобразующими.

В общей онтологии содержатся функторы порядка ω, т.е. произвольного конечного числа. Однако далее мы будем иметь дело с так называемой *элементарной онтологией*, где кроме высказываниеобразующих функторов от высказываний, разрешается использовать только функторы первого порядка и единственными квантифицируемыми переменными являются именные переменные.

Онтология является теорией связки «есть» (бытия), в которой смысл этой связки задается посредством указанной выше единственной аксиомной схемы. Связка «есть» трактуется Лесневским как двухместный высказываниеобразующий первопорядковый функтор. Это единственный исходный предикатный функтор системы. Другие предикатные и именные функторы вводятся Лесневским посредством определений, имеющих вид эквиваленций. Например,

$$S\varepsilon V \equiv \exists Q(S\varepsilon Q),$$
$$1(S) \equiv \forall M\forall R((M\varepsilon S \,\&\, R\varepsilon S) \supset M\varepsilon R),$$
$$S\varepsilon \Pi \equiv S\varepsilon S \,\&\, \neg(S\varepsilon S),$$
$$S\varepsilon \text{-}P \equiv S\varepsilon S \,\&\, \neg(S\varepsilon P),$$
$$S\varepsilon(P + M) \equiv S\varepsilon P \vee S\varepsilon M,$$
$$S\varepsilon(P \times M) \equiv S\varepsilon P \,\&\, S\varepsilon M \text{ и т.д.}$$

Первое определение задает понятие объекта (S *есть объект*, или иначе – S есть элемент универсума), второе вводит предикатор «существует не более чем один», третье вводит понятие необъекта (S *есть необъект*, или иначе – S пуст). Последние три определения задают в онтологии булевы операции.

Элементарная онтология имеет достаточно простую алгебраическую интерпретацию. Согласно этой интерпретации, она представляет собой атомную булеву алгебру. В силу теоремы Стоуна, каждая булева алгебра изоморфна некоторому полю множеств пространства X, замкнутого относительно теоретико-множественных операций ~,

+ и ×. Наиболее простым примером поля множеств произвольного пространства X является класс всех подмножеств X. В поле множеств каждое одноэлементное множество, принадлежащее ему, есть атом. Ноль алгебры является алгебраическим аналогом пустого имени и обозначается в онтологии константой Л. Пространство X (единица алгебры) соответствует универсальному понятию объекта, обозначаемому в онтологии константой V. Все более чем одноэлементные подмножества пространства X будут алгебраическими аналогами универсалий. Таким образом, каждый тип имен находит свою интерпретацию в атомной булевой алгебре.

Б. Иванусь [77] сравнил элементарную онтологию с атомной булевой алгеброй и доказал метатеорему о дефинициальной эквивалентности этих двух теорий. В свою очередь В.А. Смирнов [65] доказал метатеорему о погружаемости элементарной онтологии во второпорядковое исчисление предикатов.

Перейдем к прояснению взаимосвязи между **С2К** и элементарной онтологией (**EO**). Заметим, что эта система является сингулярной в смысле Лесневского, она в отличие от описанных выше сингулярных силлогистик строится на основе его теории семантических категорий.

Для сравнения системы **С2К** с онтологией Лесневского введем по определению в **С2К** отсутствующий в ней символ $\blacksquare$ онтологии:

D5. $S\blacksquare P \equiv 1(S)\ \&\ SaP$.

С другой стороны, **EO** расширим определениями силлогистических констант и единичного термина:

DF.1. $SaP \equiv \forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)\ \&\ \exists Q(Q\blacksquare S)$.
DF.2. $SiP \equiv \exists Q(QaS\ \&\ QaP)$.
DF.3. $SeP \equiv \neg SiP$.
DF.4. $SoP \equiv \neg SaP$.
DF.5. $1(S) \equiv \forall F\forall R((F\blacksquare S\ \&\ R\blacksquare S) \supset F\blacksquare R)$.

Чтобы доказать дефинициальную эквивалентность теорий **С2К** и **EO** надо убедиться в том, что выполняются следующие условия:

Cn(**EO** ∪ {**DF.1-DF.5**}) ⊆ Cn(**С2К** ∪ **D5**) и
Cn(**С2К** ∪ **D5**) ⊆ Cn(**EO** ∪ {**DF.1–DF.5**}),

где знак Cn означает процедуру замыкания произвольного множества формул **M**, которая определяется следующим образом:

Cn(**M**) = {**A**| **M** ⊢ **A**}.

Метатеорема 5.
Cn(**EO** ∪ {**DF.1–DF.5**}) ⊆ Cn(**$C2^{К2С}_{Д}$** ∪ **D.5**),

т.е. класс теорем и определений **EO** включается в класс теорем **С2К** ∪ **D5**. Но в силу совпадения **D2–D4** с **DF.2–DF.4,** необходимо из числа определений **EO** обосновать лишь определения **DF.1** и **DF.5**. Докажем предварительно одну вспомогательную теорему:

T7. $(1(S)\ \&\ PaS) \supset 1(P)$

1.	$1(S)\ \&\ PaS$	допущение
2.	$1(S)$	1; **ЛВ**
3.	PaS	
4.	$\forall Q(QaS \supset SaQ)$	2, **D1**
5.	$QaS \supset SaQ$	3; $\forall_{И}$
6.	QaP	допущение
7.	QaS	3, 6; *Barbara*
8.	SaQ	5, 7; **ЛВ**
9.	PaQ	3, 8; *Barbara*
10.	$QaP \supset PaQ$	9; $\supset_{В}$
11.	$\forall Q(QaP \supset PaQ)$	10; $\forall_{В}$, Q абс. огр.
12.	$1(P)$	11, **D1**

Покажем теперь, что аксиомная схема онтологии Лесневского является теоремой силлогистики **С2К**. Покажем вначале справедливость импликации слева направо.

T8. $S\blacksquare P \supset \exists Q(Q\blacksquare S)$

1.	$S\blacksquare P$	допущение
2.	$1(S)\ \&\ SaP$	1, **D5**
3.	$1(S)$	2; **ЛВ**
4.	SaP	
5.	$\forall Q(\ QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS)$	4, **K1**
6.	$\exists Q(QaS)$	5; **ЛВ**
7.	RaS	6; $\exists_{И}$, R абс. огр.
8.	$1(S)\ \&\ RaS$	3, 7; **ЛВ**
9.	$1(R)$	8, **T7**
10.	$1(R)\ \&\ RaS$	9, 7; **ЛВ**
11.	$R\blacksquare S$	10, **D5**
12.	$\exists Q(Q\blacksquare S)$	11; $\exists_{В}$
13.	$S\blacksquare P \supset \exists Q(Q\blacksquare S)$	12; $\supset_{В}$

T9. $S\blacksquare P \supset \forall M \forall R(M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S \supset M\blacksquare R)$

1.	$S\blacksquare P$	допущение
2.	$M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S$	допущение
3.	$M\blacksquare S$	2; **ЛВ**
4.	$R\blacksquare S$	
5.	$1(S) \,\&\, SaP$	1, **D5**
6.	$1(S)$	5; **ЛВ**
7.	$1(M) \,\&\, MaS$	3, **D5**
8.	$1(M)$	7; **ЛВ**
9.	MaS	
10.	$1(R) \,\&\, RaS$	4, **D5**
11.	RaS	10; **ЛВ**
12.	$\forall Q(QaS \supset SaQ)$	6, **D1**
13.	$RaS \supset SaR$	12; $\forall_{и}$
14.	SaR	13, 11; **ЛВ**
15.	MaR	14, 9; *Barbara*
16.	$1(M) \,\&\, MaR$	8, 15; **ЛВ**
17.	$M\blacksquare R$	16, **D5**
18.	$(M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S) \supset M\blacksquare R$	17; $\supset_{в}$
19.	$\forall M \forall R((M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S) \supset M\blacksquare R)$	18; $\forall_{в}$, M, R абс. огр.
20.	$S\blacksquare P \supset \forall M \forall R((M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S) \supset M\blacksquare R)$	19, $\supset_{в}$

T10. $S\blacksquare P \supset \forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$

1.	$S\blacksquare P$	допущение
2.	$1(S) \,\&\, SaP$	1, **D5**
3.	SaP	2; **ЛВ**
4.	$Q\blacksquare S$	допущение
5.	$1(Q) \,\&\, QaS$	4, **D5**
6.	$1(Q)$	5; **ЛВ**
7.	QaS	
8.	QaP	3, 7, *Barbara*
9.	$1(Q) \,\&\, QaP$	6, 8; **ЛВ**
10.	$Q\blacksquare P$	9, **D5**
11.	$Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P$	10; $\supset_{в}$
12.	$\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$	11; $\forall_{в}$, Q абс. огр.
13.	$S\blacksquare P \supset \forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$	12; $\supset_{в}$

Из теорем **T8**, **T9** и **T10** вытекает справедливость теоремы:

T11. $S\blacksquare P \supset \exists Q(Q\blacksquare S) \,\&\, \forall M \forall R(M\blacksquare S \& R\blacksquare S \supset M\blacksquare R) \,\&\, \forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$.

Докажем теперь обратную импликацию.

T12. $\forall M \forall R((M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S) \supset M\blacksquare R) \supset 1(S)$

1.	$\forall M \forall R(M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S \supset M\blacksquare R)$	допущение
2.	$\neg\forall Q(QaS \supset SaQ)$	допущение
3.	$QaS \,\&\, \neg SaQ$	2; **ЛВ**, **ЛП**
4.	QaS	3; **ЛВ**
5.	$\neg SaQ$	3; **ЛВ**
6.	$\exists P(PaS \,\&\, \neg PaQ) \vee \neg\exists P(PaS)$	5, **К1**; **ЛВ**
7.	$\exists P(PaS)$	4; $\exists_{в}$
8.	$\exists P(PaS \,\&\, \neg PaQ)$	6, 7; **ЛВ**
9.	$PaS \,\&\, \neg PaQ$	8; $\exists_{и}$ P огр.
10.	$(PaS \,\&\, \neg PaQ) \supset \exists M(1(M) \,\&\, MaS \,\&\, \neg MaQ)$	9, **К3**; $\forall_{и}$, **ЛВ**
11.	$\exists M(1(M) \,\&\, MaS \,\&\, \neg MaQ)$	10, 9; **ЛВ**
12.	$M\blacksquare S \,\&\, \neg M\blacksquare Q$	11; $\exists_{и}$ M огр., **ЛВ**
13.	$M\blacksquare S$	12; **ЛВ**
14.	$\neg M\blacksquare Q$	12; **ЛВ**
15.	QaQ	4, **T5**, **T6**
16.	$\exists T(1(T) \,\&\, TaQ)$	15, **К2**.
17.	$1(T) \,\&\, TaQ$	16; $\exists_{и}$ T огр.
18.	$1(T)$	17; **ЛВ**
19.	TaQ	17; **ЛВ**
20.	TaS	4, 19; *Barbara*
21.	$T\blacksquare S$	18, 20, **D5**; **ЛВ**
22.	$M\blacksquare S \,\&\, T\blacksquare S$	13, 21; **ЛВ**
23.	$(M\blacksquare S \,\&\, T\blacksquare S) \supset M\blacksquare T$	1; $\forall_{и}$
24.	$M\blacksquare T$	23, 22; **ЛВ**
25.	$T\blacksquare Q$	18, 19, **D5**
26.	$(M\blacksquare T \,\&\, T\blacksquare Q) \supset M\blacksquare Q$	теорема **C2K**
27.	$M\blacksquare Q$	26, 24, 25; **ЛВ**
28.	$\forall Q(QaS \supset SaQ)$	27, 14; $\neg_{в}$
29.	$1(S)$	29, **D1**

T13. $\exists Q(Q\blacksquare S) \,\&\, \forall M \forall R(M\blacksquare S \& R\blacksquare S \supset M\blacksquare R) \,\&\, \forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P) \supset S\blacksquare P$

1.	$\exists Q(Q\blacksquare S) \,\&\, \forall M \forall R((M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S) \supset M\blacksquare R) \,\&\, \forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$	допущение
2.	$\exists Q(Q\blacksquare S)$	1; **ЛВ**
3.	$\forall M \forall R((M\blacksquare S \,\&\, R\blacksquare S) \supset M\blacksquare R)$	
4.	$\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$	

5.	$Q\blacksquare S$	2; $\exists_{\text{и}}$ Q огр.
6.	$1(Q)$ & QaS	5, **D5**
7.	QaS	6; **ЛВ**
8.	QiS	7, **T5**
9.	SiQ	8, **T3**
10.	SaS	9, **T6**
11.	$1(S)$	3, **T12**
12.	$1(S)$ & SaS	11, 10; **ЛВ**
13.	$S\blacksquare S$	12, **D5**
14.	$S\blacksquare S \supset S\blacksquare P$	4; $\forall_{\text{и}}$
15.	$S\blacksquare P$	14, 13; **ЛВ**
16.	$\exists Q(Q\blacksquare S)$ & $\forall M \forall R((M\blacksquare S$ & $R\blacksquare S) \supset M\blacksquare R)$ & $\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P) \supset S\blacksquare P$	15; $\supset_{\text{и}}$

Теоремы **T13** и **T11** доказывают основную аксиому **EO**.

Перейдем теперь к доказательству определений **DF.1** и **DF.5**, принимаемых в дефинициальном расширении элементарной онтологии. Заметим, что определение **DF.5** в кванторной силлогистике **C2K** обосновывается посредством **T12** и обратной к **T12** импликации (ее доказательство ведется с точностью до переименования переменных).

T14. $1(S) \supset \forall F \forall R(F\blacksquare S$ & $R\blacksquare S \supset F\blacksquare R)$

1.	$1(S)$	допущение
2.	$F\blacksquare S$ & $R\blacksquare S$	допущение
3.	$F\blacksquare S$	2; **ЛВ**
4.	$R\blacksquare S$	
5.	$1(F)$ & FaS	3, **D5**
6.	$1(R)$ & RaS	4, **D5**
7.	RaS	6; **ЛВ**
8.	$\forall Q(QaS \supset SaQ)$	1, **D1**
9.	$RaS \supset SaR$	8; $\forall_{\text{и}}$
10.	SaR	9, 7; **ЛВ**
11.	FaS	5; **ЛВ**
12.	FaR	10, 11; *Barbara*
13.	$1(F)$	5; **ЛВ**
14.	$1(F)$ & FaR	12, 13; **ЛВ**
15.	$F\blacksquare R$	14, **D5**
16.	$F\blacksquare S$ & $R\blacksquare S \supset F\blacksquare R$	15; $\supset_{\text{и}}$
17.	$\forall F \forall R((F\blacksquare S$ & $R\blacksquare S) \supset F\blacksquare R)$	16; $\forall_{\text{и}}$ F и R огр.
18.	$1(S) \supset \forall F \forall R((F\blacksquare S$ & $R\blacksquare S) \supset F\blacksquare R)$	17; $\supset_{\text{и}}$

T12 и **T14** обосновывают дефиницию **DF.5**, т.е. верна теорема

T15. $1(S) \equiv \forall F \forall R((F\blacksquare S$ & $R\blacksquare S) \supset F\blacksquare R)$.

Докажем теперь справедливость в **C2K** определения **DF.1**.

T16. $SaP \supset (\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$ & $\exists Q(Q\blacksquare S))$

1.	SaP	допущение
2.	$\forall Q(QaS \supset QaP)$ & $\exists Q(QaS)$	1, **K1**
3.	$\forall Q(QaS \supset QaP)$	2; **ЛВ**
4.	$Q\blacksquare S$	допущение
5.	$\exists Q(Q\blacksquare S)$	4; $\exists_{\text{и}}$
6.	$1(Q)$ & QaS	4; **D5**
7.	$QaS \supset QaP$	3; $\forall_{\text{и}}$
8.	$(1(Q)$ & $QaS) \supset (1(Q)$ & $QaP)$	7; **ЛВ**
9.	$Q\blacksquare P$	8, 6; **ЛВ** и **D5**
10.	$Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P$	9; $\supset_{\text{и}}$
11.	$\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$	10; $\forall_{\text{и}}$ Q огр.
12.	$\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$ & $\exists Q(Q\blacksquare S)$	11, 5; **ЛВ**
13.	$SaP \supset (\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$ & $\exists Q(Q\blacksquare S))$	12; $\supset_{\text{и}}$

T17. $(\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$ & $\exists Q(Q\blacksquare S)) \supset SaP$

1.	$\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$ & $\exists Q(Q\blacksquare S)$	допущение
2.	$\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$	1; **ЛВ**
3.	$\exists Q(Q\blacksquare S)$	
4.	$R\blacksquare S$	3; $\exists_{\text{и}}$ R огр.
5.	$1(R)$ & RaS	4, **D5**
6.	RaS	5; **ЛВ**
7.	$\exists Q(QaS)$	6; $\exists_{\text{и}}$
8.	$\neg\forall Q(QaS \supset QaP)$	допущение
9.	$\exists Q(QaS$ & $\neg QaP)$	8; **ЛП**
10.	FaS & $\neg FaP$	9; $\exists_{\text{и}}$ F огр.
11.	$(FaS$ & $\neg FaP) \supset \exists M(1(M)$ & MaS & $\neg MaP)$	**K3**; $\forall_{\text{и}}$, **ЛВ**
12.	$\exists M(1(M)$ & MaS & $\neg MaP)$	11, 10; **ЛВ**
13.	$M\blacksquare S$ & $\neg M\blacksquare P$	12, $\exists_{\text{и}}$ M огр., **ЛВ** и **D5**
14.	$M\blacksquare S$	13; **ЛВ**
15.	$\neg M\blacksquare P$	
16.	$M\blacksquare S \supset M\blacksquare P$	2; $\forall_{\text{и}}$
17.	$M\blacksquare P$	14, 16; **ЛВ**
18.	$\forall Q(QaS \supset QaP)$	17, 15; **ЛВ**

19.	$\forall Q(QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS)$	18, 7; **ЛВ**
20.	SaP	19, **K1**

Метатеорема 5 *доказана*. Итак, элементарная онтология является подтеорией дефиницmasl дефиницимально расширенной силлогистики **C2K**.

Метатеорема 6.

$$Cn(\mathbf{C2K} \cup \mathbf{D5}) \subseteq Cn\ (\mathbf{EO} \cup \{\mathbf{DF.1}–\mathbf{DF.5}\}).$$

T1*. $SaP \supset (\forall Q(QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS))$

1.	SaP	допущение
2.	$\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)\ \&\ \exists Q(Q\blacksquare S)$	1, **DF.1**
3.	$\forall Q(Q\blacksquare S \supset Q\blacksquare P)$	2; **ЛВ**
4.	$\exists Q(Q\blacksquare S)$	
5.	$M\blacksquare S$	4; $\exists_{\text{и}}$ M огр.
6.	$\exists T(T\blacksquare M)\ \&\ \forall F\forall R((F\blacksquare M\ \&\ R\blacksquare M) \supset F\blacksquare R)\ \&$ $\forall T(T\blacksquare M \supset T\blacksquare S)$	5, аксиома **EO**
7.	$\forall T(T\blacksquare M \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare M)$	6; **ЛВ**
8.	$\exists Q(\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare Q))$	7; $\exists_{\text{в}}$
9.	$\exists Q(QaS)$	8, **DF.1**; **ЛВ**
10.	QaS	допущение
11.	$\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare Q)$	10, **DF.1**
12.	$\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S)$	11; **ЛВ**
13.	$T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S$	12; $\forall_{\text{и}}$
14.	$T\blacksquare S \supset T\blacksquare P$	3; $\forall_{\text{и}}$
15.	$T\blacksquare Q \supset T\blacksquare P$	13, 14; **ЛВ**
16.	$\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare P)$	15, $\forall_{\text{в}}$ T огр.
17.	$\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare P)\ \&\ \exists T(T\blacksquare Q)$	16, 11; **ЛВ**
18.	QaP	17, **DF.1**
19.	$QaS \supset QaP$	18; $\supset_{\text{в}}$
20.	$\forall Q(QaS \supset QaP)$	19; $\forall_{\text{в}}$ Q огр.
21.	$\forall Q(QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS)$	20, 9; **ЛВ**

T2*. $(\forall Q(QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS)) \supset SaP$

1.	$\forall Q(QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS)$	допущение
2.	$\forall Q(QaS \supset QaP)$	1; **ЛВ**
3.	$\exists Q(QaS)$	
4.	$\forall Q((\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare Q)) \supset$ $(\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare P)\ \&\ \exists T(T\blacksquare Q)))$	2, **DF.1**; **ЛВ**
5.	$\exists Q(\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare Q))$	3, **DF.1**

6.	$\forall T(T\blacksquare R \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare R)$	5; $\exists_{\text{и}}$, R огр.
7.	$\forall T(T\blacksquare R \supset T\blacksquare S)$	6, **ЛВ**
8.	$\exists T(T\blacksquare R)$	
9.	$F\blacksquare R$	8; $\exists_{\text{и}}$ F огр.
10.	$F\blacksquare R \supset F\blacksquare S$	7; $\forall_{\text{и}}$
11.	$F\blacksquare S$	10, 9; **ЛВ**
12.	$\exists T(T\blacksquare S)$	11; $\exists_{\text{в}}$
13.	$\forall T(T\blacksquare S \supset T\blacksquare S)$	теорема **EO**
14.	$\forall T(T\blacksquare S \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare S)$	12, 13; **ЛВ**
15.	$(\forall T(T\blacksquare S \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare S)) \supset (\forall T(T\blacksquare S \supset T\blacksquare P)$ $\&\ \exists T(T\blacksquare S))$	4; $\forall_{\text{и}}$
16.	$\forall T(T\blacksquare S \supset T\blacksquare P)\ \&\ \exists T(T\blacksquare S)$	15, 14, **ЛВ**
17.	SaP	16, **DF.1**

Совместно две теоремы **T1*** и **T2*** доказывают, что в элементарной онтологии верна теорема

T3*. $SaP \equiv \forall Q(QaS \supset QaP)\ \&\ \exists Q(QaS)$.

T4*. $SaS \supset \exists Q(1(Q)\ \&\ QaS)$

1.	SaS	допущение
2.	$\forall T(T\blacksquare S \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare S)$	1, **DF.1**
3.	$\exists T(T\blacksquare S)$	2; **ЛВ**
4.	$Q\blacksquare S$	3; $\exists_{\text{и}}$ Q огр.
5.	$\exists T(T\blacksquare Q)\ \&\ \forall F\forall R((F\blacksquare Q\ \&\ R\blacksquare Q) \supset F\blacksquare R)\ \&$ $\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S)$	4, аксиома **EO**
6.	$1(Q)\ \&\ QaS$	5, **DF.5** и **DF.1**
7.	$\exists Q(1(Q)\ \&\ QaS)$	6; $\exists_{\text{в}}$

T5*. $\forall Q(\forall R((1(R)\ \&\ RaS) \supset RaF) \supset (QaS \supset QaF))$

1.	$\forall R((1(R)\ \&\ RaS) \supset RaF)$	допущение
2.	QaS	допущение
3.	$\neg QaF$	допущение
4.	$\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S)\ \&\ \exists T(T\blacksquare Q)$	2, **DF.1**
5.	$\exists M(M\blacksquare Q\ \&\ \neg M\blacksquare F) \vee \neg\exists M(M\blacksquare Q)$	3, **DF.1**; **ЛП**
6.	$\forall T(T\blacksquare Q \supset T\blacksquare S)$	4; **ЛВ**
7.	$\exists T(T\blacksquare Q)$	
8.	$T\blacksquare Q$	7; $\exists_{\text{и}}$ T огр.
9.	$\exists M(M\blacksquare Q)$	8; $\exists_{\text{в}}$
10.	$\exists M(M\blacksquare Q\ \&\ \neg M\blacksquare F)$	5, 9; **ЛВ**

11.	$P \blacksquare Q \ \& \ \neg P \blacksquare F$	10; $\exists_{\text{и}}$ P огр.
12.	$P \blacksquare Q$	11; **ЛВ**
13.	$\neg P \blacksquare F$	
14.	$P \blacksquare Q \supset P \blacksquare S$	6; $\forall_{\text{и}}$
15.	$P \blacksquare S$	14, 12; **ЛВ**
16.	$\exists T(T \blacksquare P) \ \& \ \forall F \forall R((F \blacksquare P \ \& \ R \blacksquare P) \supset F \blacksquare R) \ \& \ \forall T(T \blacksquare P \supset T \blacksquare S)$	15, аксиома **EO**
17.	$(1(P) \ \& \ PaS) \supset PaF$	1, $\forall_{\text{и}}$
18.	$(1(P) \ \& \ PaS) \supset (1(P) \ \& \ PaF)$	17, **ЛВ**
19.	$(\exists T(T \blacksquare P) \ \& \ \forall F \forall R((F \blacksquare P \ \& \ R \blacksquare P) \supset F \blacksquare R) \ \& \ \forall T(T \blacksquare P \supset T \blacksquare S)) \supset (\exists T(T \blacksquare P) \ \& \ \forall F \forall R((F \blacksquare P \ \& \ R \blacksquare P) \supset F \blacksquare R) \ \& \ \forall T(T \blacksquare P \supset T \blacksquare F))$	18, **DF.1** и **DF.5**
20.	$\exists T(T \blacksquare P) \ \& \ \forall F \forall R((F \blacksquare P \ \& \ R \blacksquare P) \supset F \blacksquare R) \ \& \ \forall T(T \blacksquare P \supset T \blacksquare F)$	19, 16; **ЛВ**
21.	$P \blacksquare F$	20, аксиома **EO**. Противоречие 13 и 21
22.	QaF	13, 21; **ЛВ**
23.	$QaS \supset QaF$	22; $\supset_{\text{в}}$
24.	$\forall R((1(R) \ \& \ RaS) \supset RaF) \supset (QaS \supset QaF)$	23; $\supset_{\text{в}}$
25.	$\forall Q(\forall R((1(R) \ \& \ RaS) \supset RaF) \supset (QaS \supset QaF))$	24; $\forall_{\text{в}}$ Q огр.

Итак, все аксиомные схемы силлогистики **С2К** доказаны в **EO**. Перейдем к обоснованию в рамках элементарной онтологии определений, принятых в **С2К**. При этом доказательство теоремы

T6*. $S \blacksquare P \equiv (1(S) \ \& \ SaP)$.

– обоснование **D5** – является простым и мы его опускаем. Сложнее доказывается теорема, обосновывающая определение **D1**:

T7*. $1(S) \supset \forall Q(QaS \supset SaQ)$

1.	$1(S)$	допущение
2.	$\forall F \forall R((F \blacksquare S \ \& \ R \blacksquare S) \supset F \blacksquare R)$	1, **DF.5**
3.	QaS	допущение
4.	$\forall T(T \blacksquare Q \supset T \blacksquare S) \ \& \ \exists T(T \blacksquare Q)$	3, **DF.1**
5.	$\forall T(T \blacksquare Q \supset T \blacksquare S)$	4; **ЛВ**
6.	$\exists T(T \blacksquare Q)$	
7.	$M \blacksquare Q$	6; $\exists_{\text{и}}$ M огр.
8.	$M \blacksquare Q \supset M \blacksquare S$	5; $\forall_{\text{и}}$
9.	$M \blacksquare S$	8, 7; **ЛВ**
10.	$\exists T(T \blacksquare S)$	9; $\exists_{\text{в}}$
11.	$T \blacksquare S$	допущение
12.	$(T \blacksquare S \ \& \ M \blacksquare S) \supset T \blacksquare M$	2; $\forall_{\text{и}}$
13.	$T \blacksquare S \ \& \ M \blacksquare S$	11, 9; **ЛВ**
14.	$T \blacksquare M$	12, 13; **ЛВ**
15.	$(T \blacksquare M \ \& \ M \blacksquare Q) \supset T \blacksquare Q$	теорема **EO**
16.	$T \blacksquare M \ \& \ M \blacksquare Q$	14, 7; **ЛВ**
17.	$T \blacksquare Q$	15, 16; **ЛВ**
18.	$T \blacksquare S \supset T \blacksquare Q$	17; $\supset_{\text{в}}$
19.	$\forall T(T \blacksquare S \supset T \blacksquare Q)$	18; $\forall_{\text{в}}$ T огр.
20.	$\forall T(T \blacksquare S \supset T \blacksquare Q) \ \& \ \exists T(T \blacksquare Q)$	19, 10; **ЛВ**
21.	SaQ	20, **DF.1**
22.	$QaS \supset SaQ$	21; $\supset_{\text{в}}$
23.	$\forall Q(QaS \supset SaQ)$	22; $\forall_{\text{в}}$ Q огр.
24.	$1(S) \supset \forall Q(QaS \supset SaQ)$	23; $\supset_{\text{в}}$

T8*. $\forall Q(QaS \supset SaQ) \supset 1(S)$

1.	$\forall Q(QaS \supset SaQ)$	допущение
2.	$F \blacksquare S \ \& \ R \blacksquare S$	допущение
3.	$F \blacksquare S$	2; **ЛВ**
4.	$R \blacksquare S$	
5.	$\forall Q((\forall T(T \blacksquare Q \supset T \blacksquare S) \ \& \ \exists T(T \blacksquare Q)) \supset (\forall T(T \blacksquare S \supset T \blacksquare Q) \ \& \ \exists T(T \blacksquare S)))$	1, **DF.1**; **ЛВ**
6.	$\exists T(T \blacksquare F) \ \& \ \forall P \forall M((P \blacksquare F \ \& \ M \blacksquare F) \supset P \blacksquare M) \ \& \ \forall T(T \blacksquare F \supset T \blacksquare S)$	3, аксиома **EO**
7.	$\exists T(T \blacksquare R) \ \& \ \forall P \forall M((P \blacksquare R \ \& \ M \blacksquare R) \supset P \blacksquare M) \ \& \ \forall T(T \blacksquare R \supset T \blacksquare S)$	4, аксиома **EO**
8.	$\exists T(T \blacksquare F)$	6; **ЛВ**
9.	$\forall P \forall M((P \blacksquare F \ \& \ M \blacksquare F) \supset P \blacksquare M)$	
10.	$\forall T(T \blacksquare F \supset T \blacksquare S)$	
11.	$\forall T(T \blacksquare R \supset T \blacksquare S) \ \& \ \exists T(T \blacksquare R)$	7; **ЛВ**
12.	$T \blacksquare F$	допущение
13.	$T \blacksquare F \supset T \blacksquare S$	10; $\forall_{\text{и}}$
14.	$T \blacksquare S$	14, 13; **ЛВ**
15.	$(\forall T(T \blacksquare R \supset T \blacksquare S) \ \& \ \exists T(T \blacksquare R)) \supset (\forall T(T \blacksquare S \supset T \blacksquare R) \ \& \ \exists T(T \blacksquare S))$	5; $\forall_{\text{и}}$
16.	$\forall T(T \blacksquare S \supset T \blacksquare R) \ \& \ \exists T(T \blacksquare S)$	15, 11; **ЛВ**
17.	$\forall T(T \blacksquare S \supset T \blacksquare R)$	16; **ЛВ**

18.	$T■S \supset T■R$	17; $\forall_{\text{и}}$
19.	$T■R$	18, 14; **ЛВ**
20.	$T■F \supset T■R$	19; $\supset_{\text{в}}$
21.	$\forall T(T■F \supset T■R)$	20; $\forall_{\text{в}}$ T огр.
22.	$\exists T(T■F)$ & $\forall P \forall M((P■F$ & $M■F) \supset P■M)$ & $\forall T(T■F \supset T■R)$	8, 9, 21; **ЛВ**
23.	$F■R$	22, аксиома **ЕО**
24.	$(F■S$ & $R■S) \supset F■R$	23; $\supset_{\text{в}}$
25.	$\forall F \forall R((F■S$ & $R■S) \supset F■R)$	24; $\forall_{\text{в}}$ F и R огр.
26.	$1(S)$	25, **DF.5**

На этом завершается доказательство **Метатеоремы 6**, которая говорит о том, что силлогистика **С2К** является подтеорией дефиниционально расширенной элементарной онтологии. Совместно же **Метатеоремы 5** и **6** обосновывают следующее утверждение:

Метатеорема 7.
Элементарная онтология Лесневского **ЕО** *и силлогистика* **С2К** *дефиниционально эквивалентны.*

Данный результат, а также результаты, полученные Ч. Леевским [79], Б. Иванусем [77], В.А. Смирновым [65] и другими исследователями, позволяют сделать вывод о том, что онтология Лесневского как раз и является современной формой силлогистики. Дальнейшее расширение системы **С2К** может теперь осуществляться полностью в духе Лесневского, т.е. посредством принятия определений новых именных и высказывательных функторов.

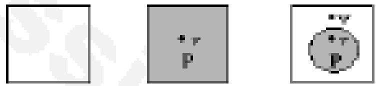
Глава X

МОДЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ И МОДЕЛЬНАЯ ПОЛНОТА СИЛЛОГИСТИК

§ 1. Модельные схемы традиционной силлогистики

В данной книге были выделены семантические различия аристотелевской и традиционной силлогистик, касающиеся характера референции силлогистических терминов. В аристотелевской силлогистике не накладывается никаких ограничений на значения субъектов и предикатов категорических высказываний. Это могут быть и термины, обозначающие пустые классы; и термины, репрезентирующие весь универсум рассуждения; и термины непустые и неуниверсальные, т.е. непустые термины, дополнение к которым в данном универсуме тоже непусто. В традиционной же силлогистике существенно наложение на термины категорических высказываний ограничивающих условий: при их интерпретации на некотором универсуме они обязательно должны оказаться знаками непустых и неуниверсальных классов. Это означает, например, для термина P, что в универсуме должен найтись хотя бы один предмет v, содержащийся в множестве, которое данный термин репрезентирует, и найтись хотя бы один предмет w, который не содержится в указанном множестве.

Для пояснения сказанного рассмотрим следующие схемы:

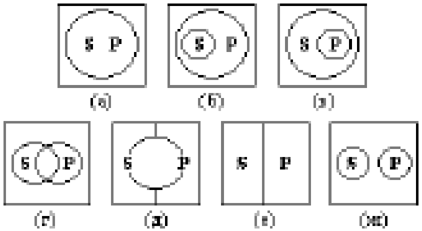


а) P пуст (б) P универсален (в) P непуст и неуниверсален

На схемах квадратами обозначены исходные предметные области, *универсумы рассуждения*. Затенением обозначен класс предметов, репрезентируемый термином P (*объем* термина P), а точками – отдельные предметы универсума. На схеме (а) нет затенения, так как объем P пуст. На схеме (б) затенен весь универсум, так как каждый предмет из этого универсума входит в объем термина P. На схеме (в) затеняется лишь часть универсума, так как в нем имеются как предметы, входящие в объем P (таковым является, например, предмет v), так и предметы, не входящие в объем P (предмет w). В традиционной силлогистике схемы (а) и (б) исключаются из рассмотрения.

В связи с данной особенностью традиционной силлогистики возникает вопрос о способе подсчета числа различных модельных схем, на которых должна проверятся некоторая формула, в зависимости от числа различных примитивных универсалий, входящих в эту формулу. В аристотелевской силлогистике такой подсчет осуществляется достаточно просто: число различных модельных схем равно $2^{2^n}-1$, где n – число различных примитивных терминов, входящих в формулу. Так, для случая двух терминов (S и P) число различных модельных схем равно 15 и все они представлены в Таблице 2 Главы I. Очевидно, что эти схемы исчерпывают все возможные объемные отношения между S и P в аристотелевской силлогистике при непустом универсуме.

Иначе обстоит дело в традиционной силлогистике. Только что было сказано, число различных модельных схем, на которых должна проверяться формула, содержащая ровно один термин, равно здесь 1. Это случай, когда термин непуст и неуниверсален. Если же число различных примитивных универсалий равно 2, то число таких модельных схем равно 7. Для терминов S и P простым перебором можно установить, что это будут следующие модельные схемы:



Однако уже для случая трех различных универсалий простой перебор перестает работать хотя бы по той причине, что неизвестна алгоритмическая процедура этого перебора. Поэтому необходимо каким-то иным способом определить количество модельных схем для случая выражений с произвольным числом примитивных терминов.

Данная задача ставилась и ранее другими исследователями. Так, в 1959 г. была опубликована статья Б.М. Кедрова «О числе отношений множеств (понятий)» [24], в основе которой лежит доклад «Математико-логическая задача в свете понятий физико-химического анализа», прочитанный автором в 1945 г. на семинаре, руководимом И.И. Жегалкиным, С.А. Яновской и П.С. Новиковым, по математической логике. В статье автор предложил формулу подсчета модельных схем для традиционной силлогистики.

Однако данной работе присущи два недостатка. Во-первых, обоснование формулы, по которой происходит подсчет модельных схем, осуществляется автором на основе не совсем ясной аналогии между, «математической комбинацией n множеств и системой из нескольких компонентов и фаз, являющихся предметом изучения физико-химического анализа» [24, 75]. Иначе говоря, одна проблема заменяется другой еще более неясной проблемой. Да и дальнейшие рассуждения автора по обоснованию полученной им формулы на основе химико-физического анализа не отличаются прозрачностью.

Другим, более существенным недостатком является то обстоятельство, что Кедров осуществляет подсчет так называемых пяти жергоновских модельных схем. К их числу из представленных выше семи модельных схем для двух терминов относятся (а), (б), (в), (г) и (ж). Но этих схем, как известно, недостаточно уже для негативной силлогистики. Действительно, если мы возьмем схему (ж) – соподчинение терминов S и P – и рассмотрим отношение отрицаний этих терминов, то мы должны будем перейти к схеме (д) с отрицательными терминами «не-S» и «не-P». Однако такой схемы среди жергоновских нет. Иначе говоря, совокупность пяти жергоновских модельных схем не является полной системой. В этой связи встает задача нахождения формулы подсчета числа всех модельных схем в полной их системе. При этом желательно, чтобы обоснование формулы было ясным и прозрачным.

Введем следующие обозначения. Будем далее обозначать случай, когда произвольный примитивный термин пуст, знаком **0**; случай, когда термин универсален, знаком **1**; а случай, когда термин непуст и неуниверсален, знаком $^1/_2$. Рассмотрим случай, когда имеется ровно один термин, скажем, термин S. Тогда для этого термина можно построить таблицу, которую назовем *представляющей силлогистической таблицей*. В ней показывается, каким является данный термин – пустым, универсальным или ни тем и ни другим. Таблица выглядит так:

S
1
0
$^1/_2$

Таблица показывает, что существует лишь одна модельная схема, удовлетворяющая семантическим требованиям, налагаемым на термины в традиционной силлогистике (случай, когда термин S оценен знаком $^1/_2$). Этот же результат можно получить и чисто математически. А именно, учитывая тот факт, что в аристотелевской силлогистике для одного термина имеется ровно 2^{2^n} -1 различных модельных схем, можно теперь вычесть из данного выражения число 3^n - 1. В основание последней формулы положено число 3. Это связано с тем, что у нас имеется три значения – **0**, **1** и $^1/_2$. Вычитая из 3 число 2, мы и получаем математически 1 – количество законных модельных схем в традиционной силлогистике для одного термина. Отметим, что вычитание из 2^{2^n} -1 числа 3^n - 1 можно упростить как 2^{2^n} - 3^n.

Рассмотрим далее случай двух терминов. Построим представляющую силлогистическую таблицу, в которой будем отмечать для них пустоту, универсальность или непустоту и неуниверсальность.

S	*P*
1	**1**
1	**0**
1	$^1/_2$
0	**1**
0	**0**
0	$^1/_2$
$^1/_2$	**1**
$^1/_2$	**0**
$^1/_2$	$^1/_2$

Первые восемь строчек таблицы показывают случаи, когда либо термин *S*, либо термин *P*, либо и тот и другой вместе принимают запрещенные в традиционной логике значения **1** или **0**, т.е. они здесь являются универсальными или пустыми. Единственный законный случай дает нам строчка 9. Поэтому, вычитая 3^n из 2^{2^n}, т.е. вычитая число 9 из 16, получим число законных модельных схем для двух терминов. Их будет ровно 7. Таким образом девятая строчка в нашей таблице задает не одну модельную схему, а сразу некий их «куст».

Рассмотрим случай с тремя терминами. Построим таблицу:

S	*P*	*M*	*S*	*P*	*M*	*S*	*P*	*M*
1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	$^1/_2$	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	$^1/_2$	**1**	**0**
1	**1**	$^1/_2$	**0**	**1**	$^1/_2$	$^1/_2$	**1**	$^1/_2$
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	$^1/_2$	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	$^1/_2$	**0**	**0**
1	**0**	$^1/_2$	**0**	**0**	$^1/_2$	$^1/_2$	**0**	$^1/_2$
1	$^1/_2$	**1**	**0**	$^1/_2$	**1**	$^1/_2$	$^1/_2$	**1**
1	$^1/_2$	**0**	**0**	$^1/_2$	**0**	$^1/_2$	$^1/_2$	**0**
1	$^1/_2$	$^1/_2$	**0**	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$

В данной представляющей силлогистической таблице среди 27 строк встречается 8 строчек, в которых нет термина, отмечаемого знаком $^1/_2$, а потому эти строчки, задающие неприемлемые в традиционной силлогистике модельные схемы, несомненно должны быть вычтены из общего количества 255 всех аристотелевски возможных схем.

В таблице встречается также 12 строчек, в которых ровно один из терминов отмечен знаком $^1/_2$. Несомненно, эти строчки задают незаконные модельные схемы. Возникает вопрос, сколько модельных схем задается каждой из этих строчек? Так как для одного термина существует только одна законная модельная схема, то данные 12 строчек задают 12 модельных схем. Они тоже должны быть исключены из общего числа 255 всех возможных схем.

Далее, в таблице встречается 6 строчек, в которых ровно два термина помечены знаком $^1/_2$, а один термин помечен либо знаком **1**, либо знаком **0**. В силу последнего обстоятельства эти строчки задают незаконные модельные схемы. Однако их будет не 6, а гораздо больше. Ранее было установлено, что 2 термина могут находиться в семи законных отношениях традиционной силлогистики, поэтому каждая строчка из указанных шести задает 7 различных модельных схем. Поэтому данные 6 строк задают всего 42 (6 × 7) модельных схем. Именно это число и должно быть исключено из числа всех схем.

Итак, для случая трех терминов, чтобы получить общее количество модельных схем традиционной силлогистики, надо исключить из числа 255 всех возможных модельных схем 8 модельных схем только лишь с пустыми и универсальными терминами, 12 модельных схем только с одним законным термином и 42 модельные схемы с двумя законными терминами. Это и даст нам число 193 принимаемых в традиционной силлогистике модельных схем, т.е. таких схем, в которых каждый из трех терминов является непустым и неуниверсальным. Как и ранее, это число равно 256 - 63, т.е. 2^{2^n} - 3^n (где n=3).

При переходе к следующему числу примитивных терминов произойдет следующее. Какое-то количество строк в представляющей силлогистической таблице из 81 строчки будут задавать модельные схемы, все термины которых являются или универсальными, или пустыми (количество таких схем будет совпадать с количеством строк); какое-то количество строчек будут задавать схемы, в которых только один термин будет неуниверсальным и непустым (в силу отмеченного выше обстоятельства, количество таких схем будет тоже совпадать с количеством строк); какое-то количество строчек задает модельные схемы, где уже два термина будут неуниверсальными и непустыми (количество этих модельных схем будет равно количеству данных строчек, умноженных на 7, так как два термина порождают именно 7 законных модельных схем); какое-то количество строчек задаст модельные схемы с тремя такими терминами (их количество будет равно количеству данных строчек, умноженных на 193, так как именно это количество схем, как только что было установлено, существует в случае трех неуниверсальных и непустых терминов); и, наконец, будет ровно одна строчка, которая задаст модельные схемы, в которых все 4 примитивных термина будут непустыми и неуниверсальными.

Если количество всех указанных строчек в *представляющей силлогистической таблице* будет каким-то образом алгоритмически зависеть от количества соответствующих строчек в представляющей силлогистической таблице с меньшим числом переменных, то проблема установления общего числа принимаемых в традиционной силлогистике модельных схем в зависимости от числа примитивных терминов будет решена. Такой алгоритм, действительно, имеется. Рассмотрим для этого следующую таблицу, показывающую количество соответствующих строчек в *представляющих силлогистических таблицах* в зависимости от количества примитивных переменных. Возьмем, для примера, количество переменных, равное 7.

$^1/_2$	*S*	*SP*	*SPM*	*SPMR*	*SPMRQ*	*SPMRQT*	*SPMRQTF*
0	2	4	8	16	32	64	128
1	1	4	12	32	80	192	448
2	0	1	6	24	80	240	672
3	0	0	1	8	40	160	560
4	0	0	0	1	10	60	280
5	0	0	0	0	1	12	84
6	0	0	0	0	0	1	14
7	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0
	3	9	27	81	243	729	2187

из общего количества строк, задаваемых формулой 3^n

В таблице самый первый слева столбец фиксирует, какие строчки в соответствующей *представляющей силлогистической таблице* будут нас интересовать. А интересовать нас будут в нашем примере строчки, в которых содержится от 0 до 7 различных терминов, отмеченных знаком $^1/_2$. Внизу таблицы предпоследняя строка указывает общее количество строчек, которые содержаться в *представляющей силлогистической таблице* при данном количестве различных терминов.

Из таблицы видно (см. 2-й столбец слева), что в случае одного термина (термина *S*) из общего числа строчек, равного трем (об этом говорит предпоследняя строчка данного столбца), в двух случаях термин *S* не отмечен знаком $^1/_2$, т.е. знак $^1/_2$ в них встречается 0 раз. С другой стороны, этот термин отмечен знаком $^1/_2$ ровно в одной строке, что тоже указано в данном столбце.

Из таблицы также видно, что с увеличением числа терминов число строк с 0 вхождений терминов, отмеченных знаком $^1/_2$, возрастает в представляющих силлогистических таблицах по закону 2^n, где n – число рассматриваемых терминов. Причина этого в том, что в этих строчках все термины отмечены только двумя знаками **1** и **0**, а потому, беря все возможные их лексикографические переборы, мы кладем в основание степенной функции число 2. Из таблицы также видно, что в каждой представляющей силлогистической таблице существует ровно одна строчка, в которой все термины помечены знаком $^1/_2$. Действительно, при лексикографическом упорядочении всех «слов» в алфавите {**1**, **0**, $^1/_2$}, каждое «слово» войдет в данный перечень только один раз. Это касается и слов вида <$^1/_2{}^1/_2\ldots{}^1/_2$>.

Взяв за основу эти два факта, мы можем теперь установить и число других строчек в представляющих силлогистических таблицах, т.е. строчек, в которых только часть терминов отмечена знаком $^1/_2$, а другие термины отмечены знаками **0** или **1**. Для прояснения сути дела сравним две представляющие силлогистические таблицы.

		продолжение	продолжение
S	*S P*	*S P*	*S P*
1	**1 1**	**0 1**	$^1/_2$ **1**
0	**1 0**	**0 0**	$^1/_2$ **0**
$^1/_2$	**1** $^1/_2$	**0** $^1/_2$	$^1/_2$ $^1/_2$

Чтобы наглядно представить себе, как изменяется число строк, содержащих знак $^1/_2$ лишь для некоторых терминов при переходе от одной представляющей таблицы к другой, мы специально расположили таблицу для двух терминов *S* и *P* в три столбца. Итак, при переходе от одной представляющей таблицы к другой происходит утроение общего числа строк за счет того, что к каждой строчке предыдущей таблицы присоединяются слева последовательно знаки **1**, **0** и $^1/_2$.

Присоединение слева знаков **1** и **0** ведет к удвоению числа строчек, содержащих знак $^1/_2$, по сравнению с их числом в предыдущей представляющей таблице, т.е. если в предыдущей таблице содержалось *m* строк с каким-то определенным количеством вхождений знака

$^1/_2$, то в новой таблице число строк с таким же количеством вхождений знака $^1/_2$ будет равно $2m$. В нашем примере это означает следующее: если в представляющей силлогистической таблице для термина *S* была только одна такая строка, то потом их станет две, так как в эту строчку будет последовательно слева поставлен сначала знак **1**, а затем **0**.

Что же касается присоединения слева к каждой строчке представляющей таблицы знака $^1/_2$, то происходит следующее: число строк в новой представляющей силлогистической таблице с k вхождением знака $^1/_2$ увеличивается на число строк, содержащих k-1 вхождение знака $^1/_2$ в предыдущей таблице. Для нашего примера это означает, что если мы интересуемся, сколько появится в представляющей силлогистической таблице для терминов *S* и *P* строчек с одним вхождением знака $^1/_2$ за счет присоединения к строчкам предыдущей представляющей таблицы этого же знака, то это количество будет определяться числом строк в последней таблице, в которые данный знак вообще не входит. В нашем случае это будет число 2. Итак, в представляющей силлогистической таблице для терминов *S* и *P* должно появиться ровно 4 строчки, содержащие в точности один раз знак $^1/_2$.

На основе вышеизложенного В.А. Бочаров [10] построил формулу, высчитывающую число различных модельных схем в зависимости от числа терминов. Сначала задается функция, высчитывающая число строк в представляющей силлогистической таблице с различным числом вхождений $^1/_2$. С этой целью вводится двухместная функция $\mathbf{g}_k(n)$, где n указывает число различных примитивных терминов, по которым строится представляющая силлогистическая таблица, а k – количество знаков $^1/_2$, входящих в строчки этой таблицы. Данная функция задается условно-рекурсивным определением по двум параметрам – k и n.

1. $\mathbf{g}_k(n) = 2^n$, если $k = 0$,
2. $\mathbf{g}_k(n) = 1$, если $k = n$,
3. $\mathbf{g}_k(n') = (2 \times \mathbf{g}_k(n)) + \mathbf{g}_k(n)$, если $0 < k < n$.

Одноместная функция $\mathbf{h}(n)$, задающая число законных модельных схем традиционной силлогистики в зависимости от числа примитивных терминов-универсалий, выглядит следующим образом:

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{2}^{2^n} - [\mathbf{g}_0(n) + (\mathbf{g}_1(n) \times \mathbf{h}(1)) + (\mathbf{g}_2(n) \times \mathbf{h}(2)) + \ldots + (\mathbf{g}_{n-1}(n) \times \mathbf{h}(n-1)) + \mathbf{g}_n(n)],$$

или несколько короче:

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{2}^{2^n} - [\mathbf{g}_0(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{g}_k(n) \times \mathbf{h}(k) + \mathbf{g}_n(n)].$$

Высчитаем по этой формуле число модельных схем традиционной силлогистики для некоторых начальных n.

$\mathbf{h}(1) = \mathbf{2}^{2^1} - [\mathbf{g}_0(1) + \mathbf{g}_1(1)] = 4 - [2 + 1] = 4 - 3 = 1;$

$\mathbf{h}(2) = \mathbf{2}^{2^2} - [\mathbf{g}_0(2) + (\mathbf{g}_1(2) \times \mathbf{h}(1)) + \mathbf{g}_2(2)] = 16 - [4 + (4 \times 1) + 1] = 16 - 9 = 7;$

$\mathbf{h}(3) = \mathbf{2}^{2^3} - [\mathbf{g}_0(3) + (\mathbf{g}_1(3) \times \mathbf{h}(1)) + (\mathbf{g}_2(3) \times \mathbf{h}(2)) + \mathbf{g}_3(3)] = 256 - [8 + (12 \times 1) + (6 \times 7) + 1] = 256 - 63 = 193,$

$\mathbf{h}(4) = \mathbf{2}^{2^4} - [\mathbf{g}_0(4) + (\mathbf{g}_1(4) \times \mathbf{h}(1)) + (\mathbf{g}_2(4) \times \mathbf{h}(2)) + (\mathbf{g}_3(4) \times \mathbf{h}(3)) + \mathbf{g}_4(4)] = 65.536 - [16 + (32 \times 1) + (24 \times 7) + (8 \times 193) + 1] = 65.536 - 1.761 = 63.775,$

$\mathbf{h}(5) = \mathbf{2}^{2^5} - [\mathbf{g}_0(5) + (\mathbf{g}_1(5) \times \mathbf{h}(1)) + (\mathbf{g}_2(5) \times \mathbf{h}(2)) + (\mathbf{g}_3(5) \times \mathbf{h}(3)) + (\mathbf{g}_4(5) \times \mathbf{h}(4)) + \mathbf{g}_5(5)] = 4.294.967.296 - [32 + (80 \times 1) + (80 \times 7) + (40 \times 193) + (10 \times 63.775) + 1] = 4.294.967.296 - 646.143 = 4.294.321.153,$

$\mathbf{h}(6) = \mathbf{2}^{2^6} - [\mathbf{g}_0(6) + (\mathbf{g}_1(6) \times \mathbf{h}(1)) + (\mathbf{g}_2(6) \times \mathbf{h}(2)) + (\mathbf{g}_3(6) \times \mathbf{h}(3)) + (\mathbf{g}_4(6) \times \mathbf{h}(4)) + (\mathbf{g}_5(6) \times \mathbf{h}(5)) + \mathbf{g}_6(6)] = 18.446.744.073.709.551.616 - [64 + (192 \times 1) + (240 \times 7) + (160 \times 193) + (60 \times 63.775) + (12 \times 4.294.321.153) + 1] = 18.446.744.073.709.551.616 - 51.535.713.153 = 18.446.744.022.173.838.463.$

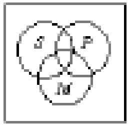
Для $n > 6$ число $\mathbf{h}(n)$ просто «запредельно».

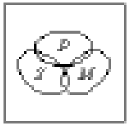
§ 2. Модельная полнота силлогистик

Известно, что классическая пропозициональная логика имеет дело с так называемыми булевыми функциями, т.е. функциями, отображающими элементы множества $\{$***истина***, ***ложь***$\}^n$ в множество $\{$***истина***, ***ложь***$\}$. Количество булевых функций является бесконечным. В то же время сами системы классической пропозициональной логики строятся с использованием лишь конечного набора пропозициональных связок – знаков конкретных булевых функций. В этой связи встает вопрос, возможно ли за счет суперпозиции используемых в той или иной системе логики исходных функций задать любую другую булеву функцию. Этот вопрос известен как проблема *функциональной полноты* некоторой системы логических связок. Для классической логики высказываний установлено, что, например, следующие системы пропозициональных связок являются функционально полными: $\{\&, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$ и $\{\supset, \neg\}$. Естественно поставить вопрос о некотором аналоге проблемы функциональной полноты исходных логических констант и относительно силлогистических теорий. Данная проблема трансформируется в этом случае следующим образом:

> *возможно ли через исходную систему логических констант, содержащихся в силлогистической теории, задать любую модельную схему, представляющую произвольные взаимоотношения между любым конечным количеством универсалий.*

Эту проблему мы будем называть проблемой *модельной полноты* для силлогистики. Многие силлогистические теории не являются модельно полными. Например, в позитивной аристотелевской силлогистике **C2**, содержащей пропозициональные связки &, ∨, ⊃ и ¬, а также силлогистические константы ***a***, ***e***, ***i*** и ***o***, не удается уже на уровне трех дескриптивных терминов *S*, *P* и *M* различить две модельные схемы, на одной из которых класс $S \cap P \cap M$ непуст, а на другой пуст:





Тем не менее, среди силлогистических теорий имеются и такие, которые обладают свойством модельной полноты, например, расширенная силлогистика **C2Ar**, сформулированная в предыдущей главе. Она содержит следующие исходные логические термины: пропозициональные связки &, ∨, ⊃ и ¬, силлогистические константы ***a*** и ***i***, а также терминообразующие константы ~ (терминное отрицание), × (терминная конъюнкция) и + (терминная дизъюнкция).

Система **C2Ar** дефиниционально эквивалентна булевой алгебре, которая является полной в указанном смысле системой, и потому пустота или непустота класса $S \cap P \cap M$ может быть задана в булевой алгебре, соответственно, условиями $S \cap P \cap M = \varnothing$ и $S \cap P \cap M \neq \varnothing$. Но дефинициональная эквивалентность **C2Ar** и булевой алгебры говорит также и о том, что эти условия можно задать чисто силлогистически: формула $(S \times P \times M)\boldsymbol{a}(S \times P \times M)$ говорит о непустоте класса $(S \times P \times M)$, а формула $\neg((S \times P \times M)\boldsymbol{a}(S \times P \times M))$ или формула $(S \times P \times M)\boldsymbol{o}(S \times P \times M)$ говорит о пустоте этого класса.

Мы покажем, что система **C2Ar** может быть сформулирована и с более экономным числом исходных логических терминов – &, ¬, ***a***, ~ и ×, так как другие термины определимы через указанные. Будет также

установлено, что силлогистические теории, в которых определимы &, ¬, ***a***, ~ и × системы **C2Ar**, являются модельно полными.

Сделаем несколько предварительных замечаний. Прежде всего отметим, что каждую модельную схему, на которой заданы объемные отношения между *n* различными универсалиями, можно трактовать как *n*-местную функцию определенного рода. Рассмотрим в этой связи Таблицу 2 Главы I. В ней приведены 15 модельных схем, на которых заданы все возможные объемные отношения между двумя терминами *S* и *P* в непустом универсуме. Имеется еще одна 16-я модельная схема для случая, когда универсум рассуждения пуст.

Выделим четыре класса – $S \times P$, $S \times {\sim}P$, ${\sim}S \times P$ и ${\sim}S \times {\sim}P$. Каждую модельную схему можно понимать как некоторую двухместную функцию f, отображающую множество $\{S \times P, S \times {\sim}P, {\sim}S \times P, {\sim}S \times {\sim}P\}$ в множество $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$. Каждая такая функция полностью определяет соотнесенную с ней модельную схему, т.е. существует взаимооднозначное соответствие между схемой и соответствующей функцией.

Вот как выглядят функции для модельных схем Таблицы 2:

Модельные схемы	Функции	$S \times P$	$S \times {\sim}P$	${\sim}S \times P$	${\sim}S \times {\sim}P$
1	$f_1(S, P)$	**0**	**0**	**0**	**1**
2	$f_2(S, P)$	**0**	**0**	**1**	**0**
3	$f_3(S, P)$	**0**	**1**	**0**	**0**
4	$f_4(S, P)$	**1**	**0**	**0**	**0**
5	$f_5(S, P)$	**0**	**0**	**1**	**1**
6	$f_6(S, P)$	**0**	**1**	**0**	**1**
7	$f_7(S, P)$	**1**	**1**	**0**	**0**
8	$f_8(S, P)$	**1**	**0**	**1**	**0**
9	$f_9(S, P)$	**1**	**0**	**1**	**1**
10	$f_{10}(S, P)$	**1**	**1**	**0**	**1**
11	$f_{11}(S, P)$	**1**	**0**	**0**	**1**
12	$f_{12}(S, P)$	**0**	**1**	**1**	**1**
13	$f_{13}(S, P)$	**1**	**1**	**1**	**1**
14	$f_{14}(S, P)$	**0**	**1**	**1**	**0**
15	$f_{15}(S, P)$	**1**	**1**	**1**	**0**
16	$f_{16}(S, P)$	**0**	**0**	**0**	**0**

Таблица 4

где значение **1** означает, что соответствующий класс не является пустым, а значение **0** указывает на пустоту класса. Последняя функция f_{16} имеет место только в пустом универсуме.

Очевидно, что любая модельная схема, на которой заданы объемные отношения между n различными универсалиями $S_1, S_2,..., S_n$, может быть представлена некоторой функцией $f(S_1, S_2,..., S_n)$, отображающей множество $\{S_1 \times S_2 \times ... \times S_n, ..., \sim S_1 \times \sim S_2 \times ... \times \sim S_n\}$ в $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.

Теперь сформулируем метатеорему о модельной полноте системы логических констант в **С2Аг**:

Метатеорема 1.

Система терминов **&**, $\neg$, $\boldsymbol{a}$, $\sim$, $\times$ *силлогистики* **С2Аг** *является модельно полной, и посредством этой системы можно задать все остальные логические константы* **С2Аг**.

Для доказательства этой метатеоремы обоснуем предварительно следующее утверждение:

Лемма 1.

Любую модельную схему, представляющую произвольные объемные взаимоотношения между любым конечным количеством универсалий, можно задать посредством логических констант **&**, $\neg$, $\boldsymbol{a}$, $\sim$ *и* $\times$ *силлогистики* **С2Аг**.

Рассмотрим произвольную модельную схему, на которой заданы конкретные объемные отношения между универсалиями $S_1, S_2,..., S_n$. Этой схеме соответствует единственная функция f, отображающая множество $\{S_1 \times S_2 \times ... \times S_n, ..., \sim S_1 \times \sim S_2 \times ... \times \sim S_n\}$ в множество $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$. Любой элемент множества $\{S_1 \times S_2 \times ... \times S_n, ..., \sim S_1 \times \sim S_2 \times ... \times \sim S_n\}$ имеет вид $S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim}$, где $S_i^{\sim}$ есть S_i или $\sim S_i$.

Сопоставим каждому элементу $S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim}$ этого множества либо формулу $(S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim})\boldsymbol{a}(S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim})$, в том случае, когда функция f отображает элемент $S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim}$ в $\mathbf{1}$, либо формулу $\neg(S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim})\boldsymbol{a}(S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim})$, если f отображает данный элемент в $\mathbf{0}$.

Упорядочим по наличию или отсутствию знаков $\sim$ перед универсалиями в n-членных терминных конъюнкциях элементы множества $\{S_1 \times S_2 \times ... \times S_n, ..., \sim S_1 \times \sim S_2 \times ... \times \sim S_n\}$. Будем обозначать формулу, сопоставленную первому элементу множества, посредством $\mathbf{C}_1$, формулу, сопоставленную второму его элементу, посредством $\mathbf{C}_2$ и т.д.

Образуем конъюнкцию $\mathbf{C}_1$ & $\mathbf{C}_2$ & ... & $\mathbf{C}_2{}^n$ всех формул, сопоставленных в соответствии с выбранной функцией f элементам множества $\{S_1 \times S_2 \times ... \times S_n, ..., \sim S_1 \times \sim S_2 \times ... \times \sim S_n\}$ в указанном порядке.

Очевидно, что $\mathbf{C}_1$ & $\mathbf{C}_2$ & ... & $\mathbf{C}_2{}^n$ не содержит логических констант, отличных от **&**, $\neg$, $\boldsymbol{a}$, $\sim$ и $\times$.

Каждый член $\mathbf{C}_i$ этой конъюнкции истинен на модельной схеме, задающей функцию f. Действительно, f отображает элемент $S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim}$ в $\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда термин $S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim}$ непуст, а формула $(S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim})\boldsymbol{a}(S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim})$ истинна в логике **С2Аг** как раз именно в случае непустоты $S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim}$. Если же f отображает элемент $S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim}$ в $\mathbf{0}$, то это равносильно утверждению о пустоте $S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim}$, что в свою очередь в **С2Аг** означает истинность формулы $\neg(S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim})\boldsymbol{a}(S_1^{\sim} \times S_2^{\sim} \times ... \times S_n^{\sim})$.

Таким образом, формула $\mathbf{C}_1$ & $\mathbf{C}_2$ & ... & $\mathbf{C}_2{}^n$ оказывается истинной на модельной схеме, по которой строится функция f. При этом на всех других модельных схемах эта конъюнкция окажется ложной. Итак, мы указали алгоритм построения формулы, задающей любую модельную схему для универсалий $S_1, S_2,..., S_n$ и содержащей логические константы из множества {**&**, $\neg$, $\boldsymbol{a}$, $\sim$, $\times$}. **Лемма 1** *доказана*.

Перейдем к доказательству **Метатеоремы 1**.

Модельная полнота силлогистики **С2Аг** прямо вытекает из **Леммы 1** и того обстоятельства, что **&**, $\neg$, $\boldsymbol{a}$, $\sim$ и $\times$ входят в число исходных логических констант языка **С2Аг**.

Остается показать, что через логические константы **&**, $\neg$, $\boldsymbol{a}$, $\sim$ и $\times$ в системе **С2Аг** могут быть заданы другие ее исходные логические константы – $\vee$, $\supset$, $\boldsymbol{i}$, и + (силлогистические константы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{o}$ вводятся в **С2Аг** определениями).

Пропозициональные связки $\vee$ и $\supset$, как известно, выразимы через константы & и $\neg$.

Стандартно операция + определяется через $\sim$ и $\times$ так:

$$S + P = \sim(\sim S \times \sim P).$$

Равенство двух теминов $T_1 = T_2$ в расширенной силлогистике **С2Аг**, как говорилось в §1 предыдущей главы, означает, что теоремой этой системы является формула $T_1 e \sim T_2$ & $T_2 e \sim T_1$. Поэтому необходимо доказать в **С2Аг** формулу $(S + P)e\sim\sim(\sim S \times \sim P)$ & $\sim(\sim S \times \sim P)e\sim(S + P)$.

1.	$(\sim S \times \sim P)e\sim\sim(S + P)$	**T13**
2.	$S + P = \sim\sim(S + P)$	**T9**
3.	$(\sim S \times \sim P)e(S + P)$	1, 2; **V**, **ЛВ**
4.	$(\sim S \times \sim P)e(S + P) \equiv (S + P)e(\sim S \times \sim P)$	**T2**
5.	$(S + P)e(\sim S \times \sim P)$	3, 4; **ЛВ**
6.	$(\sim S \times \sim P) = \sim\sim(\sim S \times \sim P)$	**T2**
7.	$(S + P)e\sim\sim(\sim S \times \sim P)$	5, 6; **V**, **ЛВ**

8.	$\sim(S+P)e\sim(\sim S \times \sim P)$	**T12**
9.	$\sim(S+P)e\sim(\sim S \times \sim P) \equiv \sim(\sim S \times \sim P)e\sim(S+P)$	**T2**
10.	$\sim(\sim S \times \sim P)e\sim(S+P)$	8, 9; **ЛВ**
11.	$(S+P)e\sim\sim(\sim S \times \sim P)\ \&\ \sim(\sim S \times \sim P)e\sim(S+P)$	7, 10; **ЛВ**

Остается обосновать определимость посредством системы констант &, ¬, ***a***, ~, × силлогистической константы *i*. Продемонстрируем, что в обобщенной силлогистике **C2Ar** доказуема эквивалентность

$$SiP \equiv (\neg Sa{\sim}P\ \&\ SaS):$$

1.	$Sa{\sim}P \supset Se{\sim}{\sim}P$	**C2Ar6**
2.	$(Pe{\sim}P\ \&\ SiP) \supset Si{\sim}{\sim}P$	**C2Ar3**
3.	$Pe{\sim}P$	**C2Ar2**
4.	$SiP \supset Si{\sim}{\sim}P$	2, 3; **ЛВ**
5.	$Se{\sim}{\sim}P \equiv \neg Si{\sim}{\sim}P$	**D1**
6.	$Si{\sim}{\sim}P \supset \neg Sa{\sim}P$	1, 5; **ЛВ**
7.	$SiP \supset \neg Sa{\sim}P$	4, 6; **ЛВ**
8.	$SiP \supset SaS$	**C2Ar8**
9.	$SiP \supset (\neg Sa{\sim}P\ \&\ SaS)$	7, 8; **ЛВ**
10.	$(SeP\ \&\ SaS) \supset Sa{\sim}P$	**C2Ar1**
11.	$(\neg Sa{\sim}P\ \&\ SaS) \supset \neg SeP$	10; **ЛВ**
12.	$SeP \equiv \neg SiP$	**D1**
13.	$(\neg Sa{\sim}P\ \&\ SaS) \supset SiP$	11, 12; **ЛВ**
14.	$SiP \equiv (\neg Sa{\sim}P\ \&\ SaS)$	9, 13; **ЛВ**

Метатеорема 1 *доказана*.

Обратим внимание на то, что ряд систем чистой позитивной силлогистики можно обогатить за счет введения терминообразующих операторов ~ и × до расширенных силлогистик, которые имеют в качестве исходных логические константы, образующие модельно полную систему. Сказанное, например, относится к исчислениям **СФ**, **СБ** и **СК**, сформулированным в Главе III и формализующим чистые позитивные фрагменты, соответственно, фундаментальной, больцановской и кэрролловской силлогистик. Основанием для такого вывода служит установленная В.А. Смирновым [66] дефинициальная эквивалентность указанных силлогистик силлогистике **С2**. Суть данного результата как раз состоит в том, что силлогистические константы одной из перечисленных систем выразимы через логические константы другой.

Иначе обстоит дело с традиционной силлогистикой, формализуемой исчислением **С4**. В ней не удается различить пустые и непустые

термины. В самом деле, формулы вида *SaS* и *SiS* являются истинными, а формулы вида *SeS* и *SoS* оказываются ложными как при непустых, так и пустых терминах. Последнее говорит о том, что традиционную силлогистику нельзя расширить до булевой алгебры. Более детально этот вопрос исследовался В.М. Поповым [54], который показал, что традиционная силлогистика расширяема до так называемой *квазибулевой алгебры*. В связи со сказанным, возникает интересная проблема о возможности расширения силлогистик **С2**, **ФС**, **СБ** и **СК** не до булевой алгебры, а до других алгебр.

§ 3. Фундаментальная силлогистика с неопределенноместной константой

Силлогистику обычно понимают как теорию правильных рассуждений, основанных на объемных отношениях в сфере общих терминов – субъектов и предикатов категорических высказываний. Силлогистические константы при этом можно рассматривать как знаки отношений между терминами по объему.

Однако, не всякое объемное отношение, как говорилось в предыдущем параграфе, можно адекватно выразить формулой в стандартных системах позитивной силлогистики. Так, если отношения между множествами устанавливаются в фиксированном универсуме, то наряду с включением и совместимостью можно выделить еще одно фундаментальное объемное отношение – *отношение исчерпываемости* (объединение объемов субъекта и предиката совпадает с универсумом), которое невыразимо в рамках силлогистик указанного типа. В Главе IV была построена обобщенная силлогистика, в которой данный недостаток устраняется.

Ограниченность выразительных возможностей стандартной силлогистики связана также и с иным обстоятельством: все ее силлогистические константы являются бинарными, поэтому некоторые объемные отношения между тремя или более терминами невозможно адекватно эксплицировать посредством формул ее языка.

Приведем примеры подобных отношений:

(1) «термины $S_1, S_2,..., S_n$ ($n > 2$) совместимы по объему»;
(2) «объемы терминов $P_1, P_2,..., P_m$ исчерпывают универсум»;
(3) «объем S включается в объединение объемов $P_1, P_2,..., P_m$»;
(4) «пересечение объемов $S_1, S_2,..., S_n$ включается в объем P».

Чтобы получить возможность выражать такого рода отношения в силлогистической теории, ее язык обычно пополняют логическими символами новой категории – так называемыми *терминными операторами*: терминным отрицанием (аналогом операции дополнения), терминной конъюнкцией (аналогом пересечения) и терминной дизъюнкцией (аналогом объединения) и вводят в сферу рассмотрения – наряду с примитивными – сложные (отрицательные, конъюнктивные, дизъюнктивные) термины на местах субъектов и предикатов.

Переход к расширенной силлогистике предполагает принятие логических символов принципиально новой синтаксической категории: если константы ***a***, ***i***, ***e***, ***o*** относятся к числу высказываниеобразующих функторов, то терминные отрицание, конъюнкция и дизъюнкция представляют собой терминообразующие операторы.

Но существует иной способ решения проблемы силлогистического представления всех возможных отношений между объемами произвольного конечного числа терминов (т.е. проблемы модельной полноты системы логических констант в силлогистике), который не изменяет столь радикально категориальную сетку позитивной силлогистики. Он состоит во ведении в ее язык (в качестве исходной) одной *неопределенно-местной* силлогистической константы – @.

В алфавите содержится также бесконечный список универсалий, классические пропозициональные связки и скобки.

Атомарные формулы языка имеют вид $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m$, где S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m – произвольные универсалии и $n + m \geq 1$. В дальнейшем последовательности (возможно пустые) универсалий будем также (в метаязыке) обозначать малыми латинскими буквами *s*, *p*, *q*, *r*.

Сложные формулы обычным способом образуются с помощью пропозициональных связок.

Смысл силлогистических формул может быть эксплицирован посредством следующего их перевода ${}^{@}$ в язык одноместного исчисления предикатов:

$$(S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m)^{@} = \neg\exists x(S_1x \,\&\, S_2x \,\&...\&\, S_nx \,\&$$
$$\& \neg P_1x \,\&\, \neg P_2x \,\&...\&\, \neg P_mx),$$
$$(\neg\mathbf{A})^{@} = \neg\mathbf{A}^{@}, \qquad (\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B})^{@} = \mathbf{A}^{@} \triangledown \mathbf{B}^{@},$$

где $\triangledown$ – произвольная бинарная связка.

Стандартные категорические высказывания записываются в данном языке следующим образом: «Всякий *S* есть *P*» – *S*@*P*, «Ни один *S* не есть *P*» – *SP*@, «Некоторый *S* есть *P*» – ¬*SP*@, «Некоторый *S* не есть *P*» – ¬*S*@*P*. Информация о пустоте термина *S* передается, в соответствии с переводом ${}^{@}$, формулой *S*@, а информация о его универсальности – формулой @*S*.

Приведенные выше отношения, невыразимые в обычных системах силлогистики, эксплицируются посредством следующих формул: (1) $\neg S_1S_2...S_n@$, (2) $@P_1P_2...P_m$, (3) $S@P_1P_2...P_m$, (4) $S_1S_2...S_n@P$.

Перевод ${}^{@}$ является обобщением стандартного, принятого в математической логике перевода категорических высказываний на язык логики предикатов. Последний адекватен, как уже говорилось, системе фундаментальной позитивной силлогистики.

В.И. Маркин [44] построил исчисление **СФ@** обобщенной позитивной фундаментальной силлогистики в языке с единственной силлогистической константой @ и доказал ее адекватность переводу ${}^{@}$.

Схемами аксиом **СФ@** являются:

@0. Схемы аксиом классического исчисления высказываний,

@1. $(Mq@r \,\&\, s@pM) \supset sq@pr$, где по крайней мере одна из последовательностей терминов – *s*, *q*, *p* или *r* – не является пустой.

@2. $S@S$,

@3. $sSPp@q \supset sPSp@q$, **@4**. $s@pSPq \supset s@pPSq$,

@5. $SSs@p \supset Ss@p$, **@6**. $s@pPP \supset s@pP$,

@7. $s@p \supset Ss@p$, **@8**. $s@p \supset s@pP$,

@9. $\neg(S@ \,\&\, @S)$.

Единственное правило вывода в **СФ@** – *modus ponens*.

Налицо удивительное сходство некоторых схем аксиом силлогистики с постулатами генценовского секвенциального исчисления. Так, **@2** напоминает основную секвенцию, **@1** – правило сечения, **@3** и **@4** – правила перестановки, **@5** и **@6** – правила сокращения, **@7** и **@8** – правила утончения (добавления).

Аксиома **@9** здесь стоит *особняком*. Ее семантический смысл – в постулировании непустоты предметной области (универсума).

Для демонстрации погружаемости силлогистической системы **СФ@** в одноместное классическое исчисление предикатов посредством перевода ${}^{@}$ зададим сначала ее теоретико-множественную семантику и докажем адекватность последней приведенному исчислению.

Моделью назовем пару <**D**, φ>, где $\mathbf{D} \neq \varnothing$, а φ есть функция приписывания значений универсалиям: $\varphi(Q) \subseteq \mathbf{D}$. С каждой моделью <**D**, φ> связывается *функция означивания*, сопоставляющая всякой формуле языка либо **1**, либо **0**. Означивание атомарных формул определяется следующим образом:

$$|S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m|_{\varphi} = \mathbf{1}, \text{ е.т.е. } \varphi(S_1) \cap \varphi(S_2) \cap ... \cap \varphi(S_n) \cap$$
$$\cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_1)) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_2)) \cap ... \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_m)) = \varnothing.$$

Правила означивания сложных формул обычные.

Силлогистическая формула **A** *истинна (значима) в модели* <**D**, φ>, е.т.е. $|\mathbf{A}|_\varphi = \mathbf{1}$ в этой модели для каждого φ. Формула **A** *общезначима*, е.т.е. она истинна в каждой модели указанного типа.

Докажем метатеорему о семантической непротиворечивости:

Метатеорема 2.
Всякая формула, доказуемая в исчислении **СФ@**, *общезначима.*

Продемонстрируем общезначимость аксиом нашей системы.

Аксиомы **@0** общезначимы, поскольку пропозициональные связки интерпретируются в семантике классически.

@1. $(Mq@r \mathbin{\&} s@pM) \supset sq@pr$.

Примем следующие обозначения:
q есть $Q_1Q_2...Q_i$, a $\mathrm{E}^q = \varphi(Q_1) \cap \varphi(Q_2) \cap ... \cap \varphi(Q_i)$;
r есть $R_1R_2...R_j$, a $\mathrm{E}^r = (\mathbf{D} \setminus \varphi(R_1)) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(R_2)) \cap ... \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(R_j))$;
s есть $S_1S_2...S_n$, a $\mathrm{E}^s = \varphi(S_1) \cap \varphi(S_2) \cap ... \cap \varphi(S_n)$;
p есть $P_1P_2...P_m$, a $\mathrm{E}^p = (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_1)) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_2)) \cap ... \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(P_m))$.

1.	$\lvert(Mq@r \mathbin{\&} s@pM) \supset sq@pr\rvert_\varphi = \mathbf{0}$	допущение
2.	$\lvert Mq@r\rvert_\varphi = \mathbf{1}$	1
3.	$\lvert s@pM\rvert_\varphi = \mathbf{1}$	1
4.	$\lvert sq@pr\rvert_\varphi = \mathbf{0}$	1
5.	$\varphi(M) \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^r = \varnothing$	2
6.	$\mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^p \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(M)) = \varnothing$	3
7.	$\mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^p \cap \mathrm{E}^r \neq \varnothing$	4
8.	$\varphi(M) \subseteq \mathbf{D}$	опр. φ
9.	$\mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^p \cap \mathrm{E}^r \subseteq \mathbf{D}$	опр. φ
10.	$\varphi(M) \cap \mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^p \cap \mathrm{E}^r \neq \varnothing \ \dot\vee$ $\mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^p \cap \mathrm{E}^r \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(M)) \neq \varnothing$	7, 8 ,9
11.	$\varphi(M) \cap \mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^p \cap \mathrm{E}^r \neq \varnothing \ \dot\supset$ $\varphi(M) \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^r \neq \varnothing$	опр. ∩
12.	$\mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^p \cap \mathrm{E}^r \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(M)) \neq \varnothing \ \dot\supset$ $\mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^p \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(M)) \neq \varnothing$	опр. ∩
13.	$\varphi(M) \cap \mathrm{E}^q \cap \mathrm{E}^r \neq \varnothing$ е.т.е. $\mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^p \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(M)) \neq \varnothing$	10, 11, 12
14.	$\mathrm{E}^s \cap \mathrm{E}^p \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(M)) \neq \varnothing$	13, 5
15.	$\lvert(Mq@r \mathbin{\&} s@pM) \supset sq@pr\rvert_\varphi = \mathbf{1}$	6, 14; от противного

@2 общезначима, поскольку $\varphi(S) \cap (\mathbf{D} \setminus \varphi(S)) = \varnothing$.

@3 и **@4** общезначимы в силу коммутативности ∩.

@5 и **@6** общезначимы в силу закона идемпотентности.

@7 и **@8** общезначимы в силу следующего свойства ∩: если пересечение двух множеств пусто, то пусто и его пересечение с третьим множеством.

@9 общезначима, поскольку в любой модели универсум непуст.

Правило *modus ponens* сохраняет свойство «быть общезначимой формулой». **Метатеорема 2** *доказана*.

Обратную метатеорему – метатеорему о семантической полноте предложенной системы силлогистики – доказываем методом Хенкина.

Множество формул Γ силлогистического языка назовем **СФ@**-*непротиворечивым*, е.т.е. формула $\neg(\mathbf{A}_1 \mathbin{\&} \mathbf{A}_2 \mathbin{\&} ... \mathbin{\&} \mathbf{A}_n)$ не доказуема в исчислении **СФ@** ни для каких $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2,..., \mathbf{A}_n$ из Γ.

Пусть **T** будет произвольным непустым множеством универсалий языка **СФ@**. Множество формул $\blacktriangle$ назовем **СФ@**-*максимальным относительно множества терминов* **T**, е.т.е. (1) $\blacktriangle$ **СФ@**-непротиворечиво; (2) формулы из $\blacktriangle$ не содержат терминов, отсутствующих в **T**; (3) для любой формулы **A** верно, что $\mathbf{A} \in \blacktriangle \ \dot\vee \ \neg\mathbf{A} \in \blacktriangle$

Докажем следующую лемму:

Лемма 2.
Если множество формул $\blacktriangle_1$ **СФ@**-*максимально относительно множества терминов* $\mathbf{T}_1$, *каждый термин, входящий в* $\mathbf{T}_2$, *содержится в* $\mathbf{T}_1$, *а* $\blacktriangle_2$ *– множество всех таких формул из* $\blacktriangle_1$, *которые не содержат терминов, отсутствующих в* $\mathbf{T}_2$, *то* $\blacktriangle_2$ **СФ@**-*максимально относительно множества* $\mathbf{T}_2$.

Покажем, что $\blacktriangle_2$ обладает свойствами максимального множества.

(1) $\blacktriangle_2$ **СФ@**-непротиворечиво, так как в противном случае, противоречивым оказалось бы и множество $\blacktriangle_1$, в которое оно включается.

(2) По условию леммы, формулы из $\blacktriangle_2$ не содержат терминов, отсутствующих в $\mathbf{T}_2$.

(3) Рассмотрим произвольную формулу **A**, не содержащую отсутствующих в $\mathbf{T}_2$ терминов. Поскольку $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{T}_1$ и в силу **СФ@**-максимальности $\blacktriangle_1$ относительно $\mathbf{T}_1$, либо **A**, либо $\neg$**A** содержится в $\blacktriangle_1$. А так как $\blacktriangle_2$ представляет собой множество всех формул из $\blacktriangle_1$, которые не содержат терминов, отсутствующих в $\mathbf{T}_2$, то какая-то из указанных формул принадлежит и $\blacktriangle_2$. **Лемма 2** *доказана*.

Докажем далее лемму о возможности расширения любого **СФ@**-непротиворечивого множества формул до **СФ@**-максимального:

Лемма 3.

Произвольное **СФ@**-*непротиворечивое множество* Γ, *такое что множество* **T** *терминов, входящих в его формулы, конечно, можно расширить до* **СФ@**-*максимального относительно* **T** *множества формул* Δ.

Пусть $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, ... – пересчет всех таких формул силлогистического языка системы **СФ@**, которые не содержат терминов, отсутствующих в **T**. Построим тогда последовательность множеств Δ_1, Δ_2, ... Делаем это следующим образом: $\Delta_1 = \Gamma$; $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$, если $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **СФ@**-непротиворечиво, и $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg\mathbf{C}_n\}$, если $\Delta_n \cup \{\mathbf{C}_n\}$ **СФ@**-противоречиво. Пусть теперь Δ будет результатом объединения всех множеств бесконечной последовательности Δ_1, Δ_2, ... Легко убедиться в том, что сконструированное Δ является **СФ@**-максимальным относительно **T** множеством формул.

Для определения канонических моделей предварительно введем ряд понятий и обоснуем несколько утверждений.

Описанием объекта посредством (попарно различных) *терминов* $Q_1,\ldots, Q_k$ ($k \geq 1$) назовем множество $\{Q_1^{0},\ldots, Q_k^{0}\}$, где каждое Q_i^{0} есть либо Q_i^{+}, либо Q_i^{-}.

Неформально, Q_i^{+} в описании некоторого объекта означает присущность, а Q_i^{-} неприсущность ему свойства Q_i. В качестве метапеременных по описаниям объектов будем использовать буквы α и β.

Пусть S_1, $S_2,\ldots$, S_n, P_1, $P_2,\ldots$, P_m – непустой конечный список попарно различных универсалий. Рассмотрим произвольное множество формул Δ, **СФ@**-максимальное относительно множества терминов $\{S_1, S_2,\ldots, S_n, P_1, P_2,\ldots, P_m\}$. Описание объекта $\{S_1^{+}, S_2^{+},\ldots, S_n^{+}, P_1^{-}, P_2^{-},\ldots, P_m^{-}\}$ посредством терминов S_1, $S_2,\ldots$, S_n, P_1, $P_2,\ldots$, P_m назовем Δ-*допустимым*, если и только если $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta$.

Из данного определения вытекает, что если Δ **СФ@**-максимально относительно **T**, и α является Δ-допустимым описанием объекта, то $Q \in \mathbf{T}$ тогда и только тогда, когда $Q^{+} \in \alpha$ или $Q^{-} \in \alpha$.

Лемма 4.

Пусть Δ_1 – **СФ@**-*максимальное множество формул относительно конечного множества универсалий* **T**, *а* Δ_2 – **СФ@**-*максимальное множество формул относительно* $\mathbf{T} \cup \{M\}$, *где* $M \notin \mathbf{T}$. *Пусть также* $\Delta_1 \subset \Delta_2$. *Тогда для каждого* Δ_1-*допустимого описания* α *найдется* Δ_2-*допустимое описание* β, *такое что* $\beta = \alpha \cup \{M^{+}\}$ *или* $\beta = \alpha \cup \{M^{-}\}$.

Рассмотрим произвольное Δ_1-допустимое описание объекта $\alpha = \{S_1, S_2,\ldots, S_n, P_1, P_2,\ldots, P_m\}$. Из определения Δ-допустимого описания следует, что, во-первых, $\mathbf{T} = \{S_1, S_2,\ldots, S_n, P_1, P_2,\ldots, P_m\}$, а во-вторых, $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta_1$.

В силу максимальности Δ_1 относительно **T** имеем:

$$\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \in \Delta_1.$$

Поскольку $\Delta_1 \subset \Delta_2$, формула $\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m$ принадлежит и множеству Δ_2. Формула

$$S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \supset S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m$$

является теоремой, она доказывается с использованием аксиом **@3**–**@6**. Следовательно, теоремой **СФ@** является и ее контрапозиция:

$$\neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \supset \neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m.$$

Все термины указанной теоремы содержатся в $\mathbf{T} \cup \{M\}$, поэтому она принадлежит любому **СФ@**-максимальному относительно $\mathbf{T} \cup \{M\}$ множеству формул, в том числе и в Δ_2.

Выше было установлено, что антецедент данной формулы принадлежит Δ_2. Следовательно, это же верно и для ее консеквента:

$$\neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \in \Delta_2.$$

Следующая формула является одной из аксиом схемы **@1**:

$$(MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \mathbin{\&} S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM) \supset$$
$$\supset S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m.$$

С ее помощью, пользуясь законами классического пропозиционального исчисления, легко доказать теорему:

$$\neg S_1S_2\ldots S_nS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mP_1P_2\ldots P_m \supset$$
$$\supset (\neg MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \vee \neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM).$$

Последняя также содержит лишь термины из $\mathbf{T} \cup \{M\}$, поэтому и она является элементом Δ_2. А так как антецедент этой формулы принадлежит данному множеству, то и консеквент принадлежит ему:

$$(\neg MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \vee \neg S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM) \in \Delta_2.$$

Отсюда в силу **СФ@**-максимальности Δ_2 относительно $\mathbf{T} \cup \{M\}$ вытекает, что

(1) $MS_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_m \notin \Delta_2$ или (2) $S_1S_2\ldots S_n@P_1P_2\ldots P_mM \notin \Delta_2$.

Отметим, что $\mathbf{T} \cup \{M\} = \{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m, M\}$.

Поэтому в случае (1) $\blacktriangle_2$-допустимым оказывается описание $\{M^+, S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-\}$, т.е. $\alpha \cup \{M^+\}$, а в случае (2) – описание $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-, M^-\}$, т.е. $\alpha \cup \{M^-\}$.

Лемма 5.

Пусть $\blacktriangle_1$ *–* **СФ@**-*максимальное множество формул относительно конечного множества терминов* **T**, *а* $\blacktriangle_2$ *–* **СФ@**-*максимальное множество формул относительно множества терминов* $\mathbf{T} \cup \{M_1,..., M_k\}$, *где* $M_1,..., M_k$ *– попарно различные термины, не входящие в* **T**. *Пусть также* $\blacktriangle_1 \subset \blacktriangle_2$. *Тогда для любого* $\blacktriangle_1$-*допустимого описания* α *найдется* $\blacktriangle_2$-*допустимое описание* β, *такое что* $\beta = \alpha \cup \{M_1^0,...,M_k^0\}$.

Доказывается k-кратным применением **Леммы 4**.

Приступим к построению канонических моделей для **СФ@**-максимальных множеств формул.

Рассмотрим произвольное множество силлогистических формул $\blacktriangle$ **СФ@**-максимальное относительно конечного множества терминов **T**. Ассоциируем с $\blacktriangle$ пару $<\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle>$, такую что $\mathbf{D}_\blacktriangle$ – множество всех $\blacktriangle$-допустимых описаний объекта, а $\varphi_\blacktriangle(Q) = \{\alpha$: α – $\blacktriangle$-допустимое описание и $Q^+ \in \alpha\}$. Пару $<\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle>$ будем называть *канонической моделью*.

Согласно определениям канонической модели и $\blacktriangle$-допустимого описания, для любого $\blacktriangle$, **СФ@**-максимального относительно **T**, любого $\blacktriangle$-допустимого описания α и произвольного термина $Q \in \mathbf{T}$ верно:

$$Q^+ \in \alpha, \text{ е.т.е. } \alpha \in \varphi_\blacktriangle(Q) \text{ и } Q^- \in \alpha, \text{ е.т.е. } \alpha \in \mathbf{D}_\blacktriangle \setminus \varphi_\blacktriangle(Q).$$

Необходимо показать, что $<\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle>$ удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к моделям в семантике силлогистики **СФ@**. Из определения канонической модели непосредственно вытекает, что $\varphi_\blacktriangle(Q) \subseteq \mathbf{D}_\blacktriangle$. Остается продемонстрировать, что $\mathbf{D}_\blacktriangle$ непусто.

Лемма 6.

Для любого множества формул $\blacktriangle$, **СФ@**-*максимального относительно конечного множества терминов* **T**, *существует по крайней мере одно* $\blacktriangle$-*допустимое описание объекта*.

Пусть $Q_1, Q_2,..., Q_k$ – список всех попарно различных терминов из множества **T**.

Рассмотрим сначала случай, когда $k = 1$, т.е. когда формулы из $\blacktriangle$ содержат только один термин Q_1.

Формула $\neg(Q_1@ \ \& \ @Q_1)$ – одна из аксиом схемы **СФ@9**. Из этой аксиомы по законам классического пропозиционального исчисления легко получить в качестве теоремы формулу $\neg Q_1@ \vee \neg @Q_1$.

Все теоремы, содержащие только термин Q_1, принадлежат **СФ@**-максимальному относительно $\{Q_1\}$ множеству формул $\blacktriangle$. В силу свойств максимального множества из того, что $\neg Q_1@ \vee \neg @Q_1 \in \blacktriangle$, вытекает, что имеет место:

$$Q_1@ \notin \blacktriangle \vee @Q_1 \notin \blacktriangle.$$

В каждом из случаев можно указать $\blacktriangle$-допустимое описание объекта: если верен первый дизъюнкт, таковым будет $\{Q_1^+\}$, а если верен второй – $\{Q_1^-\}$.

Если $k > 1$, то выделим сначала множество $\blacktriangle_1$ формул из $\blacktriangle$, не содержащих иных терминов, кроме Q_1. Согласно **Лемме 2**, $\blacktriangle_1$ является **СФ@**-максимальным относительно одноэлементного множества терминов $\{Q_1\}$. Только что было доказано существование $\blacktriangle_1$-допустимого описания объекта. Рассмотрим какое-нибудь подобное описание α: $\{Q_1^+\}$, если $Q_1@ \notin \blacktriangle_1$, или $\{Q_1^-\}$, если $@Q_1 \notin \blacktriangle_1$. В соответствии с **Леммой 5**, найдется описание $\alpha \cup \{Q_2^0,..., Q_k^0\}$, которое является $\blacktriangle$-допустимым.

Теперь мы в состоянии приступить к доказательству основной леммы о равносильности двух утверждений: о принадлежности формулы максимальному множеству и об истинности ее в канонической модели, ассоциированной с данным множеством.

Лемма 7.

Пусть $\blacktriangle$ *– произвольное множество формул,* **СФ@**-*максимальное относительно конечного множества терминов* **T**. *Пусть* **A** *– формула, не содержащая терминов отсутствующих в* **T**. *Тогда* $\mathbf{A} \in \blacktriangle$, *е.т.е.* $|\mathbf{A}|_{\varphi_\blacktriangle} = \mathbf{1}$ *в модели* $<\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle>$.

Доказательство осуществляется индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**.

Базис индукции (**A** не содержит пропозициональных связок) представляет собой рассмотрение случая, когда **A** имеет вид $s@p$, где s и p – произвольные последовательности общих терминов (элементов **T**), из которых по крайней мере одна непуста.

Базисный случай распадается на два:

(i) существует термин Q, входящий как в состав s, так и в состав p;

(ii) в последовательностях s и p отсутствуют одинаковые термины.

В случае (i) формула $s@p$ оказывается теоремой исчисления **СФ@**: ее несложно вывести из аксиомы $Q@Q$ (**@2**) с использованием «уточнений» (**@7** и **@8**) и «перестановок» (**@3** и **@4**). Из доказуемости $s@p$ вытекает, во-первых, ее принадлежность множеству $\blacktriangle$ (в силу **СФ@**-максимальности последнего относительно **T** и того факта, что $s@p$ не содержит терминов, отсутствующих в **T**), и во-вторых, ее общезначимость (в силу **Метатеоремы 2**), а значит, и значимости $s@p$ в канонической модели $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$.

Итак, в случае (i) имеем: $s@p \in \blacktriangle$ & $|s@p|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$. Отсюда вытекает: $s@p \in \blacktriangle$ е.т.е. $|s@p|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1}$ в $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$.

Перейдем к рассмотрению случая (ii), когда последовательности s и p в составе формулы $s@p$ не содержат одинаковых терминов.

Пусть $S_1, S_2,..., S_n$ – список всех попарно различных терминов, входящих в последовательность s, а $P_1, P_2,..., P_m$ – аналогичный список терминов из p. Нетрудно убедиться в том, что формулы

$$s@p \supset S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \text{ и } S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \supset s@p$$

являются теоремами **СФ@**: в доказательстве первой из них при необходимости используются «перестановки» (**@3** и **@4**) и «сокращения» (**@5** и **@6**), а в доказательстве второй – «уточнения» (**@7** и **@8**) и «перестановки».

Каждая из указанных теорем принадлежит $\blacktriangle$, поскольку не содержит отсутствующих в **T** терминов. Отсюда, в силу свойства **СФ@**-максимального множества следует:

$$s@p \in \blacktriangle \text{ е.т.е. } S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \in \blacktriangle$$

Используя в рамках семантики законы коммутативности и идемпотентности легко установить равносильность условий значимости формул $s@p$ и $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m$. Отсюда вытекает, что в модели $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$ имеет место:

$$|S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1}, \text{ е.т.е. } |s@p|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1}.$$

Таким образом, остается показать:

$$S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \in \blacktriangle \text{ е.т.е. } |S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1} \text{ в } \langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle.$$

При доказательстве данного утверждения будем иметь ввиду наличие двух возможностей:

(a) $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\} = \mathbf{T}$;
(b) $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\} \subset \mathbf{T}$.

Докажем сначала импликацию:

$$S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; |S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{1} \text{ в } \langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle.$$

1. $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \in \blacktriangle$ — допущение
2. $|S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m|_{\varphi_{\blacktriangle}} = \mathbf{0}$ в $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$ — допущение

На основе условий истинности атомарных формул из 2 получаем:

3. $\varphi_{\blacktriangle}(S_1) \cap \varphi_{\blacktriangle}(S_2) \cap ... \cap \varphi_{\blacktriangle}(S_n) \cap (\mathbf{D}_{\blacktriangle} \setminus \varphi_{\blacktriangle}(P_1)) \cap (\mathbf{D}_{\blacktriangle} \setminus \varphi_{\blacktriangle}(P_2)) \cap ... \cap (\mathbf{D}_{\blacktriangle} \setminus \varphi_{\blacktriangle}(P_m)) \neq \varnothing$.

Последнее, по определению канонической модели $\langle \mathbf{D}_{\blacktriangle}, \varphi_{\blacktriangle}\rangle$, означает:

4. Существует $\blacktriangle$-допустимое описание объекта α такое, что $S_1^+ \in \alpha$, $S_2^+ \in \alpha,..., S_n^+ \in \alpha$, $P_1^- \in \alpha$, $P_2^- \in \alpha,..., P_m^- \in \alpha$.

Рассмотрим сначала случай (а) $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\} = \mathbf{T}$.

5. Описание $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-\}$ $\blacktriangle$-допустимо

Отсюда по определению $\blacktriangle$-допустимого описания получаем:

6. $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \notin \blacktriangle$

Получили противоречие 1 и 6.
В случае (b) $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\} \subset \mathbf{T}$ имеем:

5'. Описание α помимо $S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-$ содержит также $Q_1^+, Q_2^+,..., Q_i^+, R_1^-, R_2^-,..., R_j^-$, где $Q_1, Q_2,..., Q_i, R_1, R_2,..., R_j$ – список всех попарно различных терминов из **T**, отсутствующих в множестве $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\}$ $(i + j \geq 1)$.
6'. Описание $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, Q_1^+, Q_2^+,..., Q_i^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-, R_1^-, R_2^-,..., R_j^-\}$ $\blacktriangle$-допустимо.
7'. $S_1S_2...S_nQ_1Q_2...Q_i@\ P_1P_2...P_mR_1R_2...R_j \notin \blacktriangle$

С использованием «уточнений» (**@7** и **@8**) и «перестановок» (**@3** и **@4**) в системе **СФ@** можно доказать формулу $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \supset S_1S_2...S_nQ_1Q_2...Q_i@\ P_1P_2...P_mR_1R_2...R_j$; она не содержит отсутствующих в **T** терминов, следовательно,

8'. $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \supset S_1S_2...S_nQ_1Q_2...Q_i@\ P_1P_2...P_mR_1R_2...R_j \in \blacktriangle$.

Используя свойства максимального множества, из 1 и 8' получаем:

9'. $S_1S_2...S_nQ_1Q_2...Q_i@\ P_1P_2...P_mR_1R_2...R_j \in \blacktriangle$

Пришли к противоречию: 7' и 9'.

Перейдем к доказательству обратного метаутверждения.

1. $|S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m|_{\varphi_\blacktriangle} = 1$ в $<\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle>$ допущение
2. $S_1S_2...S_n@P_1P_2...P_m \notin \blacktriangle$ допущение

Из 1 в силу условий истинности атомарных формул получаем:

3. $\varphi_\blacktriangle(S_1) \cap \varphi_\blacktriangle(S_2) \cap ... \cap \varphi_\blacktriangle(S_n) \cap (\mathbf{D}_\blacktriangle \setminus \varphi_\blacktriangle(P_1)) \cap (\mathbf{D}_\blacktriangle \setminus \varphi_\blacktriangle(P_2)) \cap ... \cap (\mathbf{D}_\blacktriangle \setminus \varphi_\blacktriangle(P_m)) = \varnothing$.

Последнее, согласно определению канонической модели, означает:

4. Не существует $\blacktriangle$-допустимого описания объекта α такого, что $S_1^+ \in \alpha, S_2^+ \in \alpha,..., S_n^+ \in \alpha, P_1^- \in \alpha, P_2^- \in \alpha,..., P_m^- \in \alpha$.

Рассмотрим сначала случай (a) $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\} = \mathbf{T}$.

5. Описание $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-\}$ $\blacktriangle$-допустимо.

В то же время из 4 следует, что

6. $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-\}$ не является $\blacktriangle$-допустимым.

Получили противоречие 5 и 6.
В случае (b) $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\} \subset \mathbf{T}$ рассмотрим множество $\blacktriangle_1$ – множество всех таких формул из $\blacktriangle$, которые не содержат никаких других терминов помимо $S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m$. Согласно **Лемме 2**

5′. Множество $\blacktriangle_1$ **СФ@**-максимально относительно множества универсалий $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\}$.

Из 2 и 5′ по определению $\blacktriangle$-допустимого описания вытекает:

6′. Описание $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-\}$ $\blacktriangle_1$-допустимо.

Отсюда в силу **Леммы 5** получаем:

7′. Существует $\blacktriangle$-допустимое описание $\{S_1^+, S_2^+,..., S_n^+, P_1^-, P_2^-,..., P_m^-\} \cup \{M_1^0,..., M_k^0\}$, где $M_1, ..., M_k$ – все попарно различные термины, входящие в $\mathbf{T}$, но отсутствующие в $\{S_1, S_2,..., S_n, P_1, P_2,..., P_m\}$.

Последнее означает, что

8′. Существует $\blacktriangle$-допустимое описание объекта α такое, что $S_1^+ \in \alpha, S_2^+ \in \alpha,..., S_n^+ \in \alpha, P_1^- \in \alpha, P_2^- \in \alpha,..., P_m^- \in \alpha$.

Получили противоречие: 4 и 8′.

Базис индукции доказан.

Обоснование индуктивного перехода тривиально. Оно базируется на классических условиях значимости сложных формул и свойствах **СФ@**-максимального множества формул $\blacktriangle$.

Метатеорема 3.
Всякая общезначимая формула доказуема в исчислении **СФ@**.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу **A** языка силлогистики. Допустим, что она не является теоремой исчисления **СФ@**. Тогда и формула $\neg\neg$**A** не доказуема в данной системе. Последнее означает, что множество $\{\neg$**A**$\}$ **СФ@**-непротиворечиво. Множество **T** силлогистических терминов в составе $\neg$**A** конечно. Согласно **Лемме 3**, $\{\neg$**A**$\}$ можно расширить до **СФ@**-максимального относительно **T** множества формул $\blacktriangle$. Ассоциируем с ним каноническую модель $<\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle>$. В силу **Леммы 7**, всякая формула, которая не содержит терминов, отсутствующих в множестве **T**, принадлежит $\blacktriangle$, е.т.е. эта формула истинна в модели $<\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle>$. Поскольку $\neg$**A** $\in \blacktriangle$, постольку $|\neg\mathbf{A}|_{\varphi_\blacktriangle} = 1$ в $<\mathbf{D}_\blacktriangle, \varphi_\blacktriangle>$. Отсюда следует, что **A** не значима в данной модели. Поэтому **A** не является общезначимой в нашей семантике формулой. В рассуждении получено противоречие. Следовательно, формула **A** доказуема в обобщенном силлогистическом исчислении **СФ@**.

Метатеорема 4.
Перевод $^@$ *погружает силлогистику в классическое одноместное исчисление предикатов* (**КОИП**).

Требуется доказать, что для любой формулы **A** языка с единственной неопределенно-местной силлогистической константой @

$$\mathbf{СФ@} \vdash \mathbf{A}, \text{ е.т.е. } \mathbf{КОИП} \vdash \mathbf{A}^@.$$

В силу **Метатеорем 2** и **3** имеем для любой формулы **A**:

(1) **СФ@** $\vdash$ **A**, е.т.е. $\vDash$ **A** в семантике **СФ@**.

Модель $<\mathbf{D}, \varphi>$ можно использовать и для оценки формул языка **КОИП**. Легко установить, что условия значимости произвольной силлогистической формулы **A** и ее перевода $\mathbf{A}^@$ совпадают. Отсюда вытекает, что

(2) $\vDash$ **A** в семантике **СФ@**, е.т.е. $\vDash \mathbf{A}^@$ в семантике **КОИП**.

Следствием метатеорем о семантической непротиворечивости и полноте **КОИП** является утверждение: для любой силлогистической формулы **A**

(3) $\models \mathbf{A}^{\circledast}$ в семантике **КОИП**, е.т.е. **КОИП** $\vdash \mathbf{A}^{\circledast}$.

Обосновываемый тезис непосредственно вытекает из утверждений (1)–(3).

В заключение выдвинем гипотезу о том, что и классическое одноместное узкое исчисление предикатов (с замкнутыми формулами, без предметных и предметно-функциональных констант) погружается в систему фундаментальной силлогистики **СФ@**, т.е. указанные исчисления рекурсивно эквивалентны. Данный факт означал бы, что средствами позитивной силлогистики действительно можно выразить все возможные виды отношений между конечным числом множеств, т.е. она представляет собой особый, «модельно полный» вариант логики классов.

Глава XI

ИНТЕНСИОНАЛЬНАЯ СЕМАНТИКА СИЛЛОГИСТИКИ

§1. Интенсиональный подход к силлогистике

В традиционной и в современной логике широкое распространение получила идущая от Аристотеля и отчетливо выраженная схоластами трактовка силлогистики как теории, которая исследует связи, возникающие в сфере *объемных* отношений между общими терминами. Силлогистические константы обычно в этой связи рассматриваются как выражающие *экстенсиональные* отношения между двумя множествами (объемами понятий): константа ***a*** репрезентирует отношение теоретико-множественного включения класса в класс, константа ***i*** – наличие общих элементов у двух классов и т.п.

Однако в истории логики складывался и иной – альтернативный экстенсиональному – подход к интерпретации смыслов атрибутивных суждений, выводы из которых составляют предмет исследования в силлогистике. Суть этого подхода заключается в трактовке субъекта и предиката высказывания как понятийных конструкций и их анализа с точки зрения *интенсиональных*, *содержательных*, а не объемных характеристик. Силлогистические константы при этом рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию.

По-видимому, впервые идея интенсиональной интерпретации силлогистики в отчетливом виде была высказана Г. Лейбницем, который прямо противопоставлял «содержательную» трактовку категорических суждений «объемной», схоластической.

«Схоластики говорят иначе, имея ввиду не понятия, а примеры, являющиеся объектами общих понятий, – писал Лейбниц, выявляя суть различий между этими подходами, – поэтому они говорят, что [понятие] металла шире [понятия] золота, ибо оно содержит больше видов, чем золото... Но я предпочитаю ориентироваться на общие понятия, т.е. идеи и их комбинации, потому что они не зависят от существования индивидуальных предметов. Поэтому я утверждаю, что [понятие] золота больше [понятия] металла, ибо для [понятия] золота необходимо большее число компонентов, чем для [понятия] металла» [31, т.3, с. 518].

В трактате «Новые опыты о человеческом разумении» Лейбниц поставил задачу обоснования традиционной силлогистики на основе интенсиональной интерпретации атрибутивных суждений: «Действительно, говоря: "*Всякий человек есть животное*", я хочу этим сказать, что все люди находятся в числе всех животных, но одновременно я имею ввиду, что идея животного включена в идею человека. Животное содержит больше индивидов, чем человек, но человек содержит больше идей или больше формальных определений. Животное содержит больше экземпляров, человек – больше степеней реальности; у первого больший объем, у второго большее содержание. Поэтому мы вправе сказать, что все учение о силлогизме можно доказать на основании учения *de continente et contento* (о содержащем и содержимом), которое отлично от учения о целом и части» [31, т.2, с. 501-502].

Попытка решения данной задачи была предпринята уже самим Лейбницем в ряде работ, среди которых особо выделяется работа «Элементы исчисления», датированная 1679 г. [31, т.3, с.514-522]. Здесь субъект и предикат атрибутивного высказывания трактуются не экстенсионально (как знаки классов предметов), а как знаки «идей или их комбинаций», т.е. содержаний понятий, причем последние понимаются обычным в традиционной логике образом – как совокупности признаков предметов. Как видно из приведенных фрагментов лейбницевских текстов, общеутвердительное высказывание выражает мысль о том, что содержание его предиката составляет часть содержания его субъекта. Что касается частноутвердительных высказываний, то их интенсиональная трактовка по Лейбницу изощреннее: содержание их предиката составляет часть содержания некоторого *видового* – по отношению к субъекту – понятия, т.е. понятия, более богатого по содержанию нежели субъект. Подробнее лейбницевский интенсиональный подход к силлогистике будет рассмотрен в следующем параграфе.

Идея интенсиональной интерпретации силлогистических теорий высказывалась и логиками последующих поколений. Так, у Н.А. Васильева помимо основного, широко известного варианта «воображаемой, неаристотелевой логики» имеется набросок дедуктивной системы силлогистического типа с суждениями трех различных качеств – утвердительными, отрицательными и индифферентными, где с каждой универсалией связывается совокупность положительных и отрицательных признаков (содержание понятия), а сами суждения фиксируют различные типы отношений между содержаниями понятий [14, с.87-88]. Современная формальная реконструкция «логики понятий» Н.А. Васильева предложена Д.В. Зайцевым и В.И. Маркиным [17]. Методы, разработанные для решения этой задачи, существенным образом используются и в настоящей монографии.

В данной главе будет показано, что поставленная Лейбницем задача построения силлогистики как теории, в основе которой лежат отношения между понятиями по содержанию, может быть успешно решена средствами современной логики. С этой целью для языка чистой позитивной силлогистики будут сформулированы различные семантики, базисные конструкции которых имеют интенсиональную природу, а также доказана их адекватность ряду силлогистических систем: как хорошо известных, так и совсем новых.

§ 2. Интенсиональная семантика традиционной силлогистики

Первая система силлогистики, для которой будет предложена адекватная интенсиональная семантика, – это исчисление **С4**, формализующее чистый позитивный фрагмент традиционной силлогистики. Именно в этой семантике наиболее точно находят свое воплощение оригинальные идеи самого Лейбница.

Систему **С4** будем рассматривать в ее первоначальной формулировке, принадлежащей Я. Лукасевичу [32]. Аксиомами являются классические тавтологии и формулы следующих типов:

А1. $(MaP \mathbin{\&} SaM) \supset SaP$,
А2. $(MaP \mathbin{\&} MiS) \supset SiP$,
А3. SaS,
А4. SiS.

Силлогистические константы e (для общеотрицательных) и o (для частноотрицательных суждений) вводятся посредством определений:

D1. $SeP \equiv_{Df} \neg SiP$, **D2.** $SoP \equiv_{Df} \neg SaP$.

Единственное правило вывода в системе – *modus ponens*. Понятия доказательства и теоремы обычные.

В дальнейшем при доказательстве метатеоремы о полноте силлогистики Лукасевича нам понадобятся следующие ее теоремы:

Т1. $\neg(SaP \mathbin{\&} SeP)$,
Т2. $(MeP \mathbin{\&} SaM) \supset SeP$,
Т3. $(MeP \mathbin{\&} SiM) \supset \neg SaP$,
Т4. $(MaP \mathbin{\&} SiM) \supset \neg SeP$,
Т5. $\neg PeS \supset SiP$.

Идея интенсиональной семантики для силлогистики Лукасевича состоит в следующем. Универсалиям в качестве значений сопоставляются не множества предметов, не объемы понятий, а совокупности, включающие в себя положительные и отрицательные признаки, т.е. содержания понятий (в традиционной их трактовке). Силлогистические константы ***a***, ***i***, ***e***, ***o*** репрезентируют теперь определенные отношения между содержаниями понятий. Высказывания типа ***a*** интерпретируются как утверждения о том, что содержание их предиката составляет часть содержания их субъекта. Высказывания типа ***i*** выражают мысль об отсутствии в содержаниях их терминов противоречащих признаков: положительного (указывающего на присущность некоторого свойства) и отрицательного (указывающего на отсутствие данного свойства). Высказывания типов ***e*** и ***o***, как обычно, рассматриваются как противоречащие высказываниям типов ***i*** и ***a***, соответственно.

Эта идея была реализована В.И. Маркиным [41] следующим образом. Рассматривается множество *литералов* $\mathbf{L} = \{p_1, \sim p_1, p_2, \sim p_2, \ldots\}$. Литералы, не содержащие символа «∼», представляют *положительные признаки*, а содержащие данный символ – *отрицательные признаки*. В дальнейшем с целью упрощения метатеоретических доказательств будем считать, что универсалиями объектного языка силлогистики являются знаки $P_1, P_2, \ldots$ и будем использовать в качестве метапеременных по положительным литералам малые буквы s, p, m, q, t, причем малая буква представляет литерал с индексом j (т.е. литерал p_j) тогда и только тогда, когда соответствующая большая буква (синтаксическая переменная по универсалиям) представляет универсалию с тем же индексом (т.е. термин P_j).

Понятием (в аспекте его интенсиональной характеристики – содержания) назовем произвольное непустое подмножество **L**. Требование непустоты совершенно естественно, поскольку содержание понятия должно включать в себя по крайней мере один признак.

Некоторые понятия, в соответствии с приведенным определением, окажутся *противоречивыми*, в их состав войдет хотя бы одна пара литералов p_i и $\sim p_i$. Для построения семантики, адекватной силлогистике **C4**, рассматриваются только непротиворечивые понятия.

Непротиворечивым понятием назовем произвольное непустое и непротиворечивое подмножество **L**, т.е. множество $\alpha \subseteq \mathbf{L}$, удовлетворяющее двум условиям:

(i) $\alpha \neq \varnothing$;
(ii) не существует p_i, такого что $p_i \in \alpha$ и $\sim p_i \in \alpha$.

Пусть **H** – множество всех непротиворечивых понятий. Зададим на **H** операцию *, сопоставляющую каждому понятию α *противоположное* ему понятие α^{*}:

$$(p_i \in \alpha^{*}, \text{ е.т.е. } \sim p_i \in \alpha) \text{ и } (\sim p_i \in \alpha^{*}, \text{ е.т.е. } p_i \in \alpha).$$

Эта операция замещает каждый положительный литерал на отрицательный литерал с тем же индексом, а отрицательный – на соответствующий положительный. Например, $\{p_1, \sim p_2, p_3\}^{*} = \{\sim p_1, p_2, \sim p_3\}$.

Несложно показать, что * обладает следующими свойствами:

$$\text{(a) } \alpha \cap \alpha^{*} = \varnothing, \qquad \text{(b) } \alpha^{**} = \alpha, \qquad \text{(c) } \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{*} \subseteq \beta^{*}.$$

Определим *интерпретирующую функцию* π, сопоставляющую каждой универсалии P в качестве значения некоторое (интенсионально трактуемое) непротиворечивое понятие: $\pi(P) \in \mathbf{H}$.

Зададим понятие *истинности* (*значимости*) формулы языка чистой позитивной силлогистики при интерпретации π:

(***a*1**) $|SaP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \subseteq \pi(S)$;
(***i*1**) $|SiP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)^{*} \cap \pi(S) = \varnothing$.

Условия значимости сложных формул обычные.

В силу определений **D1** и **D2** условия значимости формул *SeP* и *SoP* таковы:

(***e*1**) $|SeP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)^{*} \cap \pi(S) \neq \varnothing$;
(***o*1**) $|SoP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing$.

Силлогистическая формула **A** называется *общезначимой*, е.т.е. $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$, при любой интерпретации универсалий π.

Перейдем к доказательству адекватности силлогистики Лукасевича данной интенсиональной семантике.

Несложно установить, что каждая аксиома силлогистики Лукасевича общезначима, а правило *modus ponens* сохраняет общезначимость формул. Отсюда следует утверждение о семантической непротиворечивости этой системы:

Метатеорема 1.
Всякая теорема силлогистики Лукасевича является общезначимой формулой.

Обратное утверждение (метатеорема о семантической полноте) доказывается методом Хенкина. Множество формул Γ называется **C4**-*непротиворечивым*, е.т.е. не найдется формул $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_k$ таких, что формула $\neg(\mathbf{B}_1 \mathbin{\&} \mathbf{B}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathbf{B}_k)$ была бы теоремой **C4**. Множество формул Δ называется **C4**-*максимальным*, е.т.е. оно **C4**-непротиворечиво и для любой формулы **A** верно, что $\mathbf{A} \in \blacktriangle$ или $\neg\mathbf{A} \in \blacktriangle$. Множество $\blacktriangle$ обладает свойствами (а)–(ж), которые выделялись в §1 Главы III.

Стандартным способом доказывается **Лемма 1** о том, что произвольное **C4**-непротиворечивое множество силлогистических формул Γ может быть расширено до **C4**-максимального множества $\blacktriangle$.

С каждым максимальным множеством $\blacktriangle$ связывается *каноническое приписывание* значений универсалиям – функция $\pi_{\blacktriangle}$, определяемая следующим образом:

$$\pi_{\blacktriangle}(Q) = \{t: QaT \in \blacktriangle\} \cup \{\sim t: QeT \in \blacktriangle\}.$$

Прежде всего, необходимо показать, что $\pi_{\blacktriangle}(Q)$ является непротиворечивым понятием, т.е. обладает свойствами (i) непустоты и (ii) непротиворечивости.

(i) $\pi_{\blacktriangle}(Q) \neq \varnothing$.

1.	$QaQ \in \blacktriangle$	**A3**, (а)
2.	$Q \in \pi_{\blacktriangle}(Q)$	1; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
3.	$\pi_{\blacktriangle}(Q) \neq \varnothing$	2

(ii) не существует t такого, что $t \in \pi_{\blacktriangle}(Q)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(Q)$.

1.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(Q)\ \&\ \sim t \in \pi_{\blacktriangle}(Q)$	допущение
2.	$QaT \in \blacktriangle\ \&\ QeT \in \blacktriangle$	1; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
3.	$QaT\ \&\ QeT \in \blacktriangle$	2; (г)
4.	$\neg(QaT\ \&\ QeT) \in \blacktriangle$	**T1**, (а)
5.	$QaT\ \&\ QeT \notin \blacktriangle$	4, (в). Противоречие 3 и 5.

Далее индукцией по длине силлогистической формулы **A** доказывается основная лемма:

Лемма 2.
Для произвольного **C4**-*максимального множества* $\blacktriangle$ *и произвольной формулы* **A** *верно:* $\mathbf{A} \in \blacktriangle$, *е.т.е.* $|\mathbf{A}|_{\alpha\blacktriangle} = \mathbf{1}$.

Базис индукции содержит два случая.

I. **A** есть *SaP*.

Докажем сначала, что $SaP \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; |SaP|_{\alpha\blacktriangle} = \mathbf{1}$.

1.	$SaP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	допущение
3.	$PaT \in \blacktriangle$	2; опр. $\pi_{\blacktriangle}$

4.	$(PaT\ \&\ SaP) \supset SaT \in \blacktriangle$	**A1**, (а)
5.	$SaT \in \blacktriangle$	4, 3, 1; (г), (б)
6.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$	5; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
7.	$\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	допущение
8.	$PeT \in \blacktriangle$	7; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
9.	$(PeT\ \&\ SaP) \supset SeT \in \blacktriangle$	**T2**, (а)
10.	$SeT \in \blacktriangle$	9, 8, 1; (г), (б)
11.	$\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$	10; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
12.	$\pi_{\blacktriangle}(P) \subseteq \pi_{\blacktriangle}(S)$	2–6, 7–11; опр. $\pi_{\blacktriangle}$ и $\subseteq$
13.	$|SaP|_{\alpha\blacktriangle} = \mathbf{1}$	12; (*a***1**)

Докажем далее, что $|SaP|_{\alpha\blacktriangle} = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; SaP \in \blacktriangle$

1.	$|SaP|_{\alpha\blacktriangle} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\pi_{\blacktriangle}(P) \subseteq \pi_{\blacktriangle}(S)$	1; (*a***1**)
3.	$PaP \in \blacktriangle$	**A1**, (а)
4.	$p \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	3; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
5.	$p \in \pi_{\blacktriangle}(S)$	2, 4
6.	$SaP \in \blacktriangle$	5; опр. $\pi_{\blacktriangle}$

II. **A** есть *SiP*.

Докажем сначала, что $SiP \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; |SiP|_{\alpha\blacktriangle} = \mathbf{1}$.

1.	$SiP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(P)^{\#}$	допущение
3.	$\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	2; опр. $^{\#}$
4.	$PeT \in \blacktriangle$	3; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
5.	$(PeT\ \&\ SiP) \supset \neg SaT \in \blacktriangle$	**T3**, (а)
6.	$\neg SaT \in \blacktriangle$	4, 1, 5; (г), (б)
7.	$SaT \notin \blacktriangle$	6; (в)
8.	$t \notin \pi_{\blacktriangle}(S)$	7; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
9.	$\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(P)^{\#}$	допущение
10.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	9; опр. $^{\#}$
11.	$PaT \in \blacktriangle$	10; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
12.	$(PaT\ \&\ SiP) \supset \neg SeT \in \blacktriangle$	**T4**, (а)
13.	$\neg SeT \in \blacktriangle$	11, 1, 12; (г), (б)
14.	$SeT \notin \blacktriangle$	13; (в)
15.	$\sim t \notin \pi_{\blacktriangle}(S)$	14; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
16.	$\pi_{\blacktriangle}(P)^{\#} \cap \pi_{\blacktriangle}(S) = \varnothing$	2–8, 9–15; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
17.	$|SiP|_{\alpha\blacktriangle} = \mathbf{1}$	16; (*i***1**)

Докажем далее, что $|SiP|_{v_\blacktriangle} = \mathbf{1} \;\dot{\supset}\; SiP \in \blacktriangle$.

1.	$\lvert SiP\rvert_{v_\blacktriangle} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\pi_\blacktriangle(P)^* \cap \pi_\blacktriangle(S) = \varnothing$	1; (*i*1)
3.	$SaS \in \blacktriangle$	**A3**, (а)
4.	$s \in \pi_\blacktriangle(S)$	3; опр. $\pi_\blacktriangle$
5.	$s \notin \pi_\blacktriangle(P)^*$	2, 4
6.	$\sim s \notin \pi_\blacktriangle(P)$	5; опр. *
7.	$PeS \notin \blacktriangle$	6; опр. $\pi_\blacktriangle$
8.	$\neg PeS \in \blacktriangle$	7; (в)
9.	$\neg PeS \supset SiP \in \blacktriangle$	**T5**, (а)
10.	$SiP \in \blacktriangle$	9, 8; (б)

Доказательство индуктивного перехода тривиально: оно основывается на классической семантике пропозициональных связок и свойствах (в)–(ж) максимального множества. **Лемма 2** *доказана.*

Теперь можно обосновать метатеорему о полноте:

Метатеорема 2.
Всякая общезначимая формула является теоремой силлогистики Лукасевича.

Рассмотрим произвольную общезначимую формулу **A**. Допустим, что она недоказуема в силлогистике Лукасевича. Тогда формула $\neg\neg$**A** также не будет теоремой этой системы. Отсюда, по определению **C4**-непротиворечивого множества, следует, что таковым является множество $\{\neg\mathbf{A}\}$. *Оно, согласно* **Лемме 1**, *может быть расширено до* **C4**-максимального множества $\blacktriangle$. В силу **Леммы 2**, $|\neg\mathbf{A}|_{v_\blacktriangle} = \mathbf{1}$. Значит, формула **A** при каноническом приписывании не является значимой, что противоречит исходному допущению о ее общезначимости. **Метатеорема 2** *доказана.*

Выше уже отмечалось, что исторически первая попытка интерпретации силлогистики как дедуктивной системы, основанной на отношениях между понятиями по содержанию, принадлежала Г. Лейбницу. Завершим параграф рассмотрением вопроса о том, насколько предложенная нами семантика соответствует лейбницевским идеям.

Прежде всего заметим, что Лейбниц трактует понятие, в интенсиональном аспекте, именно как совокупность (или же конъюнкцию) признаков. Требование непустоты этой совокупности настолько очевидно, что не требует специального упоминания.

Несколько сложнее обстоит дело с отрицательными признаками и требованием непротиворечивости содержаний понятий. В работе «Элементы исчисления» [31, т.3, с.514-522], где наиболее подробным образом формулируется интенсиональная семантика силлогистики, речи об отрицательных признаках не идет вообще. Однако в других работах того же периода Лейбниц рассматривает понятия, содержащие отрицательные признаки. Более того, у него можно обнаружить аналог введенной нами операции *, сопоставляющей произвольному понятию противоположное понятие за счет замены положительных признаков на соответствующие отрицательные, а отрицательных – на положительные: «Если ... будет отрицаться этот термин – "ученый не-умный, не-справедливый", очевидно получится "справедливый, умный неученый"» [31, т.3, с.537]. Явная формулировка принципа непротиворечивости содержания понятия у Лейбница отсутствует, хотя все понятия, приводимые им в качестве примеров, этому требованию удовлетворяют.

Лейбницевская трактовка высказываний типа ***a*** в точности соответствует условию (***a*1**) в сформулированной нами семантике: «всякое истинное общеутвердительное категорическое предложение означает не что иное, как некую связь предиката и субъекта ..., что предикат находится в субъекте, или содержится в субъекте» [31, т.3, с.516]; «отсюда мы можем знать, является ли истинным некоторое общеутвердительное предложение. Ведь в нем понятие субъекта, взятое абсолютно и неопределенно и вообще рассматриваемое само по себе в целом, всегда содержит понятие предиката» [31, т.3, с.520].

Более любопытен вопрос о соответствии семантического условия (*i*1) лейбницевской трактовке высказываний типа *i*. «В *частноутвердительном предложении*, – пишет Лейбниц, – нет необходимости, чтобы предикат присутствовал в субъекте, ... но достаточно предикату содержаться в каком-то виде субъекта, т.е. *чтобы понятие какого-то вида субъекта содержало понятие предиката*» [31, т.3, с.521]. Заметим, что *вид*, по Лейбницу, – это более богатое по содержанию понятие, результат добавления нового признака или нескольких признаков к содержанию исходного понятия.

Итак, согласно Лейбницу, высказывание типа ***i*** истинно, е.т.е. к содержанию его субъекта можно добавить признаки так, что в полученную совокупность будет включаться содержание предиката; иными словами, *субъект и предикат имеют общий вид*. В нашей семантике данное условие истинности может быть выражено таким образом:

$$(\boldsymbol{i}\mathbf{1}')\ |SiP|_v = \mathbf{1},\ \text{е.т.е.}\ \exists\alpha\in\mathbf{H}(\pi(S)\subseteq\alpha \text{ и } \pi(P)\subseteq\alpha).$$

Продемонстрируем равносильность в нашей семантике условий (*i*1) и (*i*1*). Покажем сначала, что из $\exists\alpha\in\mathbf{H}(\pi(S)\subseteq\alpha$ и $\pi(P)\subseteq\alpha)$ вытекает $\pi(P)^{*}\cap\pi(S)=\varnothing$. Допустим, что найдется понятие α, такое что $\pi(S)\subseteq\alpha$ и $\pi(P)\subseteq\alpha$, а $\pi(P)^{*}\cap\pi(S)\neq\varnothing$. Последнее означает существование литерала, который содержится как в $\pi(P)^{*}$, так и в $\pi(S)$. Пусть это положительный литерал p_i (случай с отрицательным литералом аналогичен): $p_i\in\pi(P)^{*}$ и $p_i\in\pi(S)$. По определению * отсюда следует, что $\sim p_i\in\pi(P)$. Из исходного допущения получаем, что понятие α содержит p_i и $\sim p_i$ одновременно, что невозможно в силу ограничения (ii).

Докажем далее обратное утверждение. Допустим, что $\pi(P)^{*}\cap\pi(S)=\varnothing$. Отсюда по определению * вытекает, что $\pi(P)\cup\pi(S)$ является непротиворечивым понятием, причем и $\pi(S)$, и $\pi(P)$ – его подмножества. Следовательно, $\exists\alpha\in\mathbf{H}(\pi(S)\subseteq\alpha$ и $\pi(P)\subseteq\alpha)$.

Таким образом, предложенное нами семантическое определение силлогистической константы *i* эквивалентно лейбницевскому при трактовке содержаний понятий как совокупностей положительных и отрицательных признаков и принятии принципа их непротиворечивости.

Предпринятый анализ лейбницевских текстов позволяет утверждать, что этот мыслитель, если и не дал систематического и строгого решения поставленной им проблемы интенсиональной интерпретации традиционной силлогистики, то вплотную подошел к данному решению; во всяком случае, его работы содержат практически весь необходимый материал для построения адекватной для указанной логической системы семантики, в которой силлогистические константы трактуются как знаки отношений между понятиями по содержанию.

§ 3. Фундаментальная силлогистика с интенсиональной точки зрения

Возникает вопрос о возможности построения семантик, исходные конструкции которых имеют интенсиональную природу, для других – отличных от традиционной – известных систем силлогистики. Среди них особое место занимает *фундаментальная силлогистика*, идея которой восходит к работам Г. Лейбница и Ф. Брентано. С семантической точки зрения, отличие фундаментальной силлогистики от традиционной заключается в отказе от исходной предпосылки о *непустоте* (и *неуниверсальности* – в случае введения в язык терминного отрицания) объемов терминов. В то же время, экстенсиональная семантика

для этих систем может быть сформулирована так (причем данная формулировка наиболее естественна), что условия истинности категорических высказываний будут одинаковыми: константе *a* соответствует теоретико-множественное включение объема субъекта в объем предиката, константе *i* – непустота пересечения объемов терминов и т.д. Чистый позитивный вариант фундаментальной силлогистики – исчисление **СФ** – детально исследован в Главе III.

Первая естественно возникающая гипотеза о том, каким образом может быть построена адекватная интенсиональная семантика для фундаментальной силлогистики, основывается на известных еще в традиционной логике фактах взаимозависимости объемов и содержаний понятий. Выдвигается эта гипотеза следующим рассуждением по аналогии: если при экстенсиональной трактовке категорических высказываний фундаментальная силлогистика получается из традиционной отказом от требования непустоты объемов терминов при сохранении условий истинности высказываний, то при интенсиональном подходе следует отбросить исходную предпосылку о непротиворечивости содержаний, не меняя принципов означивания формул.

Для того, чтобы реализовать данную идею, необходимо включить в область рассмотрения наряду с непротиворечивыми также и противоречивые понятия. Как и ранее **Н** есть множество всех непротиворечивых понятий. Пусть **П** – множество всех понятий (как непротиворечивых, так и противоречивых). Очевидно, что $\mathbf{H}\subset\mathbf{П}$. Каждое $\alpha\in\mathbf{П}$ обязано удовлетворять условию непустоты (i): $\alpha\neq\varnothing$, но не обязано удовлетворять условию непротиворечивости (ii).

Расширим до **П** область определения и область значений введенной в предыдущем параграфе операции *, которая каждому понятию α сопоставляет *противоположное* ему понятие α^{*}, замещая каждый положительный литерал на отрицательный литерал с тем же индексом, а каждый отрицательный на соответствующий положительный.

Пусть *интерпретирующая функция* π сопоставляет теперь каждой универсалии в качестве значения некоторое (необязательно непротиворечивое) понятие: $\pi(P)\in\mathbf{П}$.

Определение *значимости* формулы языка чистой позитивной силлогистики при интерпретации с базисными условиями

(a**1**) $|SaP|_{\pi}=\mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)\subseteq\pi(S)$;
(i**1**) $|SiP|_{\pi}=\mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)^{*}\cap\pi(S)=\varnothing$;
(e**1**) $|SeP|_{\pi}=\mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)^{*}\cap\pi(S)\neq\varnothing$;
(o**1**) $|SoP|_{\pi}=\mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)\setminus\pi(S)\neq\varnothing$

для атомарных формул, а также общезначимости формулы остаются такими же, как для силлогистики **С4** (различие заключается лишь в трактовке самой интерпретации π).

Какое же силлогистическое исчисление аксиоматизирует класс общезначимых формул, определяемых данной семантикой? Верна ли наша изначальная гипотеза о том, что таковым является система **СФ**?

Оказывается, что это не так: аксиомы **СФ5** ($SiP \supset SiS$) и **СФ6** ($SoP \supset SiS$) системы **СФ** необщезначимы в данной семантике (они незначимы, например, при интерпретации $\pi(S) = \{p_1, \neg p_1\}$, $\pi(P) = \{p_2\}$).

Формализацию интенсиональной семантики силлогистического языка, допускающей использование противоречивых по содержанию понятий, обеспечивает не система **СФ** «экстенсиональной» фундаментальной силлогистики, а ее *подсистема*, получающаяся из **СФ** отбрасыванием аксиомных схем **СФ5** и **СФ6**. Данное исчисление было предложено В.И. Маркиным [42], назовем его **ИСФ**, т.е. системой *«интенсиональной» фундаментальной силлогистики*. Изложим доказательство адекватности приведенной семантики силлогистической системе **ИСФ**.

Несложно продемонстрировать общезначимость каждой аксиомы **ИСФ** и инвариантность правила *modus ponens* относительно общезначимости формул. Отсюда следует семантическая непротиворечивость системы **ИСФ**:

Метатеорема 3.
Всякая теорема силлогистики **ИСФ** *является общезначимой формулой.*

Метатеорема о семантической полноте **ИСФ** доказывается методом Хенкина. Относительно **ИСФ** стандартным образом релятивизируются понятия непротиворечивого и максимального множеств формул. Последнее множество, как и ранее, обладает свойствами (а)–(ж).

Стандартно доказывается утверждение о возможности расширения произвольного **ИСФ**-непротиворечивого множества формул до **ИСФ**-максимального. С каждым **ИСФ**-максимальным множеством ♟ связывается *каноническое приписывание* значений универсалиям – функция $\pi_{♟}$, определяемая как в предыдущем параграфе :

$$\pi_{♟}(Q) = \{r: QaT \in ♟\} \cup \{\neg r: QeT \in ♟\},$$

где r есть положительный литерал с тем же индексом, что и универсалия, представляемая синтаксической переменной *T*; отличие от случая системы **С4** лишь в том, что $\pi_{♟}(Q)$ теперь подмножество **П**, а не **Н** .

Так же, как в предыдущем параграфе, доказывается, что $\pi_{♟}(Q) \neq \varnothing$. Формула QaQ, использовавшаяся в предыдущем доказательстве, является законом не только в **С4**, но и в **ИСФ**.

Индукцией по длине формулы **A** доказывается основная лемма:

Лемма 3.
Для произвольного **ИСФ**-*максимального множества* ♟ *и произвольной формулы* **A** *верно:* **A** ∈ ♟, *т.т.е.* $|\mathbf{A}|_{♟} = \mathbf{1}$.

Базис индукции содержит четыре случая.

I. A есть *SaP*.
II. A есть *SiP*.

Обоснование этих двух базисных случаев в точности совпадает с соответствующими рассуждениями **Леммы 2**, относившимися к силлогистике Лукасевича. Это объясняется тем, что все теоремы **С4**, использовавшиеся в указанных рассуждениях, являются доказуемыми формулами и в силлогистике **ИСФ**, определения канонического приписывания и операции * в обеих теориях одинаковы, а свойства множеств формул, максимальных относительно **С4** и **ИСФ**, совершенно аналогичны.[2]

III. A есть *SeP*.

Данный случай сводится к случаю (**II**) в силу наличия в ♟ аксиомы **СФ7** системы **ИСФ** ($SeP \equiv \neg SiP$), свойств максимального множества, а также того факта, что условия значимости формул вида *SiP* (*i***1**) и *SeP* (*e***1**) противоречат друг другу.

IV. A есть *SoP*.

Данный случай сводится к случаю (**I**) в силу наличия в ♟ аксиомы **СФ8** ($SoP \equiv \neg SaP$), свойств максимального множества, а также того факта, что условия значимости формул вида *SoP* (*o***1**) и *SaP* (*a***1**) противоречат друг другу.

[1] Единственным существенным отличием в доказательствах семантической полноты применительно к этим двум системам является необходимость дополнительно обосновывать непротиворечивость множества $\pi_{♟}(Q)$ в случае силлогистики **С4**, при этом используется ее теорема **T1** – $\neg(SaP \,\&\, SeP)$, недоказуемая в системе **ИСФ**. Интересно, что добавление схемы аксиом $\neg(SaP \,\&\, SeP)$ к постулатам исчисления **ИСФ** дает силлогистику, класс теорем которой совпадает с множеством теорем **С4**.

Доказательство индуктивного перехода тривиально: оно основывается на классической семантике пропозициональных связок и свойствах (в)–(ж) максимального множества. **Лемма 3** *доказана*.

Метатеорема 4.
Всякая общезначимая формула является теоремой **ИСФ**.

Доказательство семантической полноты силлогистики **ИСФ** осуществляется с помощью того же самого рассуждения, которое представлено в доказательстве **Метатеоремы 2** предыдущего параграфа.

Система **ИСФ** «интенсиональной» фундаментальной силлогистики в плане дедуктивных особенностей во многом сходна со своим «экстенсиональным» аналогом – исчислением **СФ**. В обеих системах доказуемы одни и те же базисные силлогистические законы: 15 модусов простого категорического силлогизма, законы диагоналей логического квадрата, принципы обращения высказываний типов ***e*** и ***i***, закон силлогистического тождества ***SaS***. Кроме того, в каждой из этих систем отбрасываются некоторые законы традиционной силлогистики: модусы силлогизма с общими посылками и частным заключением, законы подчинения, принцип обращения высказываний типа ***a***, принципы контрарности ***a*** и ***e***, субконтрарности ***i*** и ***o***, закон силлогистического тождества *SiS*.

Перейдем теперь к рассмотрению другого вопроса: о возможности построения адекватной интенсиональной семантики для «экстенсиональной» фундаментальной силлогистики **СФ**.

Базисные конструкции этой семантики такие же, как и для системы **ИСФ**, в частности, в качестве значений универсалий допускаются противоречивые понятия. Изменяются лишь семантические определения элементарных силлогистических формул. Понятие *значимости* силлогистической формулы при интерпретации π для **СФ** определяется следующим образом:

(***a*2**) $|SaP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$;
(***i*2**) $|SiP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \in \mathbf{H}$;
(***e*2**) $|SeP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$;
(***o*2**) $|SoP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing$ и $\pi(S) \in \mathbf{H}$.

Согласно данному определению, введенному В.И. Маркиным [42], общеутвердительное высказывание значимо, если содержание его предиката составляет часть содержания его субъекта или же субъект противоречив (т.е. максимально информативен). Смысл частноут-

вердительного высказывания состоит в отсутствии в содержаниях субъекта и предиката противоречащих признаков (у каждого из понятий по отдельности и по отношению их друг к другу).

Нетрудно убедиться в том, что при принятии исходной предпосылки (ii) о непротиворечивости понятий условия значимости формул в семантиках для **ИСФ** и **СФ** эквивалентны. Однако, в семантиках указанных систем, где условие (ii) отсутствует, условия значимости общих высказываний в **СФ** оказываются более слабыми, а условия значимости частных высказываний – более сильными, чем в **ИСФ**. Для условий (***a*2**) и (***a*1**), (***o*2**) и (***o*1**) верность этого утверждения очевидна. Что же касается условий (***i*2**) и (***i*1**), (***e*2**) и (***e*1**), справедливость сказанного станет наглядной, если эквивалентным образом переформулировать условия (***i*2**) и (***e*2**):

(***i*2***) $|SiP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)^{*} \cap \pi(S) = \varnothing$ и $\pi(S) \in \mathbf{H}$ и $\pi(P) \in \mathbf{H}$;
(***e*2***) $|SeP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)^{*} \cap \pi(S) \neq \varnothing$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$ или $\pi(P) \notin \mathbf{H}$.

При доказательстве непротиворечивости системы **СФ** относительно интенсиональной семантики с условиями значимости (***a*2**), (***i*2**), (***e*2**), (***o*2**) некоторую сложность представляет лишь демонстрация общезначимости аксиом типов **СФ1** и **СФ2**:

СФ1. $(MaP \,\&\, SaM) \supset SaP$

1.	$\lvert MaP \,\&\, SaM\rvert_\pi = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\pi(P) \subseteq \pi(M)$ или $\pi(M) \notin \mathbf{H}$	1, (***a*2**)
3.	$\pi(M) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$	1, (***a*2**)
4.	$\pi(M) \subseteq \pi(S)$	допущение
5.	$\pi(P) \subseteq \pi(M)$	допущение
6.	$\pi(P) \subseteq \pi(S)$	5, 4; транзитивность $\subseteq$
7.	$\pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$	6; **ЛВ**
8.	$\pi(M) \notin \mathbf{H}$	допущение
9.	$\pi(S) \notin \mathbf{H}$	4, 8; опр. π и **Н**
10.	$\pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$	9; **ЛВ**
11.	$\pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$	2, 5-7, 8-10; **ЛВ**
12.	$\pi(S) \notin \mathbf{H}$	допущение
13.	$\pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$	12; **ЛВ**
14.	$\pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$	3, 4-11, 12-13; **ЛВ**
15.	$\lvert SaP\rvert_\pi = \mathbf{1}$	14; (***a*2**)

СФ2. $(MeP \,\&\, SaM) \supset SeP$

1.	$\lvert MeP \,\&\, SaM \rvert_{\alpha} = 1$	допущение
2.	$\pi(M) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$	1; (**e2**)
3.	$\pi(M) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$	1; (**a2**)
4.	$\pi(M) \subseteq \pi(S)$	допущение
5.	$\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$	2, 4; опр. π и $\mathbf{H}$
6.	$\pi(S) \notin \mathbf{H}$	допущение
7.	$\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$	6; опр. π и $\mathbf{H}$
8.	$\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$	3, 4-5, 6-7; **ЛВ**
9.	$\lvert SeP \rvert_{\alpha} = 1$	8; (**e2**)

Таким образом, можно считать доказанной метатеорему:

Метатеорема 5.
Всякая формула, доказуемая в исчислении **СФ**, *общезначима в семантике с условиями значимости* (**a2**), (**i2**), (**e2**), (**o2**).

Доказательство метатеоремы о семантической полноте осуществляется по тому же плану, что и для систем **С4** и **ИСФ**: аналогичным образом вводятся понятия **СФ**-непротиворечивого и **СФ**-максимального множеств формул, обосновывается утверждение о возможности расширения произвольного **СФ**-непротиворечивого множества до **СФ**-максимального, с каждым **СФ**-максимальным множеством $\blacktriangle$ связывается *каноническое приписывание* $\pi_{\blacktriangle}$, определяемое тем же способом. Различие состоит только в доказательстве основной леммы:

Лемма 4.
Для произвольного **СФ***-максимального множества* $\blacktriangle$ *и произвольной формулы* **A** *верно:* $\mathbf{A} \in \blacktriangle$, *е.т.е.* $\lvert \mathbf{A} \rvert_{\blacktriangle} = 1$.

Нетривиальным оказывается рассмотрение следующих двух базисных случаев.

I. A есть SaP.

Докажем сначала, что $SaP \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; \lvert SaP \rvert_{\blacktriangle} = 1$.

Первые 12 шагов доказательства повторяют соответствующий фрагмент основной леммы для систем **С4** и **ИСФ** (см. случай **I Леммы 2**). Завершающие шаги искомого доказательства таковы:

13.	$\pi_{\blacktriangle}(P) \subseteq \pi_{\blacktriangle}(S)$ или $\pi_{\blacktriangle}(S) \notin \mathbf{H}$	12
14.	$\lvert SaP \rvert_{\blacktriangle} = 1$	13; (**a2**)

Докажем далее, что $\lvert SaP \rvert_{\blacktriangle} = 1 \;\dot{\supset}\; SaP \in \blacktriangle$.

1.	$\lvert SaP \rvert_{\blacktriangle} = 1$	допущение
2.	$\pi_{\blacktriangle}(P) \subseteq \pi_{\blacktriangle}(S)$ или $\pi_{\blacktriangle}(S) \notin \mathbf{H}$	1; (**a2**)
3.	$\pi_{\blacktriangle}(P) \subseteq \pi_{\blacktriangle}(S)$	допущение
4.	$PaP \in \blacktriangle$	**СФ4**, (а)
5.	$P \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	4; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
6.	$P \in \pi_{\blacktriangle}(S)$	3, 5
7.	$SaP \in \blacktriangle$	6; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
8.	$\pi_{\blacktriangle}(S) \notin \mathbf{H}$	допущение
9.	существует t: $t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$	8; опр. $\pi_{\blacktriangle}$ и $\mathbf{H}$
10.	$SaT \in \blacktriangle$	9; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
11.	$SeT \in \blacktriangle$	9; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
12.	$SeT \supset TeS \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
13.	$TeS \in \blacktriangle$	12, 11, (б)
14.	$(TeS \,\&\, SaT) \supset SeS \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)
15.	$SeS \in \blacktriangle$	14, 13, 10; (г), (б)
16.	$SeS \supset SaP \in \blacktriangle$	теорема **СФ**[1], (а)
17.	$SaP \in \blacktriangle$	16, 15; (б)
18.	$SaP \in \blacktriangle$	2, 3-7, 8-17; **ЛВ**

II. A есть SiP.

Докажем сначала, что $SiP \in \blacktriangle \;\dot{\supset}\; \lvert SiP \rvert_{\blacktriangle} = 1$.

1.	$SiP \in \blacktriangle$	допущение
2.	$\lvert SiP \rvert_{\blacktriangle} = 0$	допущение
3.	$\pi_{\blacktriangle}(S) \cup \pi_{\blacktriangle}(P) \notin \mathbf{H}$	2; (**i2**)
4.	существует t: $[t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(S)]$ или $[t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(P)]$ или $[t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(P)]$ или $[t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(S)]$	3; опр. π и $\mathbf{H}$
5.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$	допущение
6.	$SaT \in \blacktriangle$	5; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
7.	$SeT \in \blacktriangle$	5; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
8.	$SeT \supset TeS \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
9.	$TeS \in \blacktriangle$	8, 7; (б)
10.	$(TeS \,\&\, SaT) \supset SeS \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)

[1] Данная формула доказывается в системе **СФ** с использованием аксиом **СФ6**, **СФ7** и **СФ8**.

11.	$SeS \in \blacktriangle$	10, 9, 6; (г), (б)
12.	$SeS \supset SeP \in \blacktriangle$	теорема **СФ**[4], (а)
13.	$SeP \in \blacktriangle$	12, 11; (а)
14.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	допущение
15.	$PaT \in \blacktriangle$	14; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
16.	$PeT \in \blacktriangle$	14; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
17.	$PeT \supset TeP \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
18.	$TeP \in \blacktriangle$	17, 16; (б)
19.	$(TeP \,\&\, PaT) \supset PeP \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)
20.	$PeP \in \blacktriangle$	19, 18, 15; (г), (б)
21.	$PeP \supset SeP \in \blacktriangle$	теорема **СФ**[5], (а)
22.	$SeP \in \blacktriangle$	21, 20; (б)
23.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	допущение
24.	$SaT \in \blacktriangle$	23; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
25.	$PeT \in \blacktriangle$	23; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
26.	$PeT \supset TeP \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
27.	$TeP \in \blacktriangle$	26, 25; (б)
28.	$(TeP \,\&\, SaT) \supset SeP \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)
29.	$SeP \in \blacktriangle$	28, 27, 24; (г), (б)
30.	$t \in \pi_{\blacktriangle}(P)$ и $\sim t \in \pi_{\blacktriangle}(S)$	допущение
31.	$PaT \in \blacktriangle$	30; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
32.	$SeT \in \blacktriangle$	30; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
33.	$SeT \supset TeS \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
34.	$TeS \in \blacktriangle$	33, 32; (б)
35.	$(TeS \,\&\, PaT) \supset PeS \in \blacktriangle$	**СФ2**, (а)
36.	$PeS \in \blacktriangle$	35, 34, 31; (г), (б)
37.	$PeS \supset SeP \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
38.	$SeP \in \blacktriangle$	37, 36; (б)
39.	$SeP \in \blacktriangle$	4, 5-13, 14-22, 23-29, 30-38; **ЛВ**
40.	$SeP \equiv \neg SiP \in \blacktriangle$	**СФ7**, (а)
41.	$SiP \notin \blacktriangle$	40, 39; (в), (ж)
42.	$\lfloor SiP \rfloor_{u\blacktriangle} = \mathbf{1}$	1, 41; от противного

Докажем далее, что $\lfloor SiP \rfloor_{u\blacktriangle} = \mathbf{1} \supset SiP \in \blacktriangle$.

---

[4] Данная формула доказывается в исчислении **СФ** с использованием аксиом **СФ5** и **СФ7**.

[5] Данная формула доказывается в **СФ** с использованием **СФ5**, **СФ7** и **СФ3**.

1.	$\lfloor SiP \rfloor_{u\blacktriangle} = \mathbf{1}$	допущение
2.	$\pi_{\blacktriangle}(S) \cup \pi_{\blacktriangle}(P) \in \mathbf{H}$	1; (*i*2)
3.	$SiP \notin \blacktriangle$	допущение
4.	$SeP \equiv \neg SiP \in \blacktriangle$	**СФ7**, (а)
5.	$SeP \in \blacktriangle$	3, 4; (в), (ж)
6.	$SeP \supset PeS \in \blacktriangle$	**СФ3**, (а)
7.	$PeS \in \blacktriangle$	6, 5; (б)
8.	$SaS \in \blacktriangle$	**СФ4**, (а)
9.	$\sim s \in \pi_{\blacktriangle}(P)$	7; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
10.	$s \in \pi_{\blacktriangle}(S)$	8; опр. $\pi_{\blacktriangle}$
11.	$\pi_{\blacktriangle}(S) \cup \pi_{\blacktriangle}(P) \notin \mathbf{H}$	7, 8; опр. **Н**
12.	$SiP \in \blacktriangle$	2, 11; от противного

Лемма 4 *доказана*. Далее стандартным образом обосновывается метатеорема о семантической полноте **СФ** относительно интенсиональной семантики:

Метатеорема 6.
Всякая формула, общезначимая в семантике с условиями значимости (***a*2**), (***i*2**), (***e*2**), (***o*2**), *является теоремой* **СФ**.

Комбинируя различные условия значимости для ***a*** и ***o*** с различными условиями значимости для ***e*** и ***i***, В.И. Маркин [42] получил адекватные семантики еще для двух систем чистой позитивной силлогистики, занимающих промежуточное положение между рассмотренными в данном параграфе исчислениями **ИСФ** и **СФ**.

Пусть сначала силлогистические константы ***a*** и ***o*** трактуются в духе **СФ**, а константы ***e*** и ***i*** – в духе **ИСФ**:

(***a*2**) $\lfloor SaP \rfloor_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$;
(***i*1**) $\lfloor SiP \rfloor_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)^{\#} \cap \pi(S) = \varnothing$;
(***e*1**) $\lfloor SeP \rfloor_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P)^{\#} \cap \pi(S) \neq \varnothing$;
(***o*2**) $\lfloor SoP \rfloor_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing$ и $\pi(S) \in \mathbf{H}$.

Класс общезначимых в такой семантике формул аксиоматизирует исчисление, получающееся из **СФ** отбрасыванием схемы аксиом **СФ5** ($SiP \supset SiS$). Назовем эту систему **ИСФ'**.

Далее, пусть, наоборот, константы ***a*** и ***o*** трактуются в духе **ИСФ**, а ***e*** и ***i*** – в духе **СФ**:

(***a*1**) $\lfloor SaP \rfloor_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \subseteq \pi(S)$;
(***i*2**) $\lfloor SiP \rfloor_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \in \mathbf{H}$;

(***e*2**) $|SeP|_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$;
(***o*1**) $|SoP|_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing$.

Адекватная формализация данной семантики получается отбрасыванием из **СФ** схемы аксиом **СФ6** (*SaP* ⊃ *SiS*). Будем называть эту систему **ИСФ**$^{\blacksquare}$.

Весь необходимый материал для демонстрации семантической непротиворечивости и полноты исчислений **ИСФ**$^{\bullet}$ и **ИСФ**$^{\blacksquare}$ уже содержится в приведенных выше доказательствах, касающихся систем **ИСФ** и **СФ**. Так, пункт **I** (**A** есть *SaP*) основной леммы для **ИСФ**$^{\bullet}$ повторяет доказательство соответствующего случая **Леммы 4** для **СФ**, а пункт **II** (**A** есть *SiP*) – соответствующего случая **Леммы 3** для **ИСФ** и **Леммы 2** для **С4**. Что же касается основной леммы для системы **ИСФ**$^{\blacksquare}$, то здесь, напротив, случай **I** доказывается как в **Лемме 3** для **ИСФ** и **Лемме 2** для **С4**, а случай **II** – как в **Лемме 4** для **СФ**.

На этой основе легко доказываются две метатеоремы о семантической адекватности:

Метатеорема 7.
Всякая формула доказуема в исчислении **ИСФ**$^{\bullet}$, *е.т.е. она общезначима в семантике с условиями* (***a*2**), (***i*1**), (***e*1**), (***o*2**).

Метатеорема 8.
Всякая формула доказуема в исчислении **ИСФ**$^{\blacksquare}$, *е.т.е. она общезначима в семантике с условиями* (***a*1**), (***i*2**), (***e*2**), (***o*1**).

В заключение обсудим одну проблему, касающуюся статуса представленных в данной статье силлогистических систем **ИСФ**, **ИСФ**$^{\bullet}$ и **ИСФ**$^{\blacksquare}$. Существуют ли «экстенсиональные» семантики для этих исчислений, построенные в том же духе, что и подобная семантика для **СФ**? Иными словами, имеется ли адекватная трактовка силлогистических констант указанных исчислений в терминах булевой логики классов или, что в сущности то же самое, существуют ли операции (рекурсивно задаваемые по степени сложности формулы), которые погружали бы системы **ИСФ**, **ИСФ**$^{\bullet}$ и **ИСФ**$^{\blacksquare}$ в классическое одноместное исчисление предикатов? Особый интерес представляет вопрос о наличии или отсутствии погружающих операций стандартного типа в смысле Л.И. Мчедлишвили [49]: эти операции каждой элементарной формуле *SaP*, *SeP*, *SiP*, *SoP* языка силлогистики сопоставляют замкнутую формулу языка логики предикатов, не содержащую предикатных символов, отличных от одноместных предикаторных констант *S* и *P*.

Выскажем гипотезу, что ответ на последний вопрос – отрицательный. Справедливость данной гипотезы означала бы, что по крайней мере в некоторых существенных отношениях интенсиональный подход к построению силлогистических теорий семантически гибче и богаче стандартного, экстенсионального.

§4. Интенсиональная семантика силлогистики С2

Напомним тот общеизвестный факт, что исчисление **СФ** существенно слабее силлогистики в ее аристотелевском и традиционном варианте: в этой системе не доказуемы модусы силлогизма с общими посылками и частным заключением, законы подчинения, принцип обращения для высказываний типа ***a***, принцип контрарности ***a*** и ***e***, принцип субконтрарности ***i*** и ***o***. С другой стороны, силлогистика **С4** Я. Лукасевича представляет, по мнению многих исследователей, слишком сильную теорию, поскольку ее теоремами являются так называемые *законы силлогистического тождества SaS* и *SiS*, наличие которых среди постулатов оригинальной дедуктивной системы Аристотеля вызывает серьезные сомнения.

В связи с вышесказанным, большой интерес представляет изучение силлогистических теорий, законами которых являются все силлогистические принципы, принимаемые Аристотелем, но которые не содержат при этом законов силлогистического тождества. Одной из наиболее известных систем подобного типа является силлогистическое исчисление **С2**, рассмотренное в Главе III.

Проблема нахождения адекватной интенсиональной семантики для силлогистики **С2** была решена В.И. Маркиным [43].

Определение интерпретирующей функции π сохраняется таким же, как и в семантике для систем **ИСФ** и **СФ**: $\pi(P) \in \mathbf{\Pi}$, т.е. π сопоставляет произвольной универсалии *P* непустое, но необязательно непротиворечивое множество признаков. Условия значимости формул типов ***e*** и ***i*** остаются теми же, что и в семантике для **СФ**. Условия значимости формул типов ***a*** и ***o*** меняются:

(***a*3**) $|SaP|_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \subseteq \pi(S)$ и $\pi(S) \in \mathbf{H}$;
(***i*2**) $|SiP|_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \in \mathbf{H}$;
(***e*2**) $|SeP|_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$;
(***o*3**) $|SoP|_u = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing$ или $\pi(S) \notin \mathbf{H}$.

Согласно (***a*3**), каждое истинное общеутвердительное суждение должно иметь непротиворечивый субъект. Если же субъект противоречив, то, согласно (***o*3**), оказывается истинным частноотрицательное суждение. Вообще, все утвердительные суждения с противоречивым субъектом, с точки зрения данных семантических определений, должны оцениваться как ложные, а все подобного типа отрицательные суждения – как истинные.

Назовем формулу **A** **C2**-*общезначимой* ($\vDash_{C2}$ **A**), е.т.е. $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ при любой интерпретации универсалий π с базисными условиями (***a*3**), (***e*2**), (***i*2**) и (***o*3**).

При доказательстве адекватности построенной семантики исчислению **C2** используется следующий перевод χ_1 формул данной системы в систему **СФ**, заданный в §4 Главы III:

$\chi_1(SaP) = SaP \;\&\; SiS$, $\qquad \chi_1(SiP) = SiP$,

$\chi_1(SeP) = SeP$, $\qquad \chi_1(SoP) = SoP \vee \neg SiS$,

$\chi_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\chi_1(\mathbf{A})$, $\qquad \chi_1(\mathbf{A} \triangledown \mathbf{B}) = \chi_1(\mathbf{A}) \triangledown \chi_1(\mathbf{B})$.

Предварительно докажем вспомогательное утверждение о равносильности условий значимости произвольной формулы в интенсиональной семантике для **C2** и ее χ_1-перевода в семантике для **СФ**:

Лемма 5.
Для любой формулы **A** *языка позитивной силлогистики и произвольной интерпретирующей функции* π *верно:* $|\chi_1(\mathbf{A})|_\pi = \mathbf{1}$ *в семантике* **СФ**, *е.т.е.* $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ *в семантике* **C2**.

Доказательство леммы ведется возвратной индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**. Допустим, что для любой формулы, содержащей меньшее, чем **A**, число пропозициональных связок, утверждение леммы справедливо. Далее осуществляем разбор случаев по возможным видам формулы **A**.

I. Пусть **A** имеет вид *SaP*.

$|\chi_1(SaP)|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **СФ**, е.т.е. (по определению χ_1) $|SaP \;\&\; SiS|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **СФ**, е.т.е. (в силу (***a*2**) и (***i*2**)) [$\pi(P) \subseteq \pi(S)$ или $\pi(S) \notin$ **H**] и $\pi(S) \cup \pi(S) \in$ **H**, е.т.е. [$\pi(P) \subseteq \pi(S)$ и $\pi(S) \in$ **H**] или [$\pi(S) \notin$ **H** и $\pi(S) \in$ **H**], е.т.е. [$\pi(P) \subseteq \pi(S)$ и $\pi(S) \in$ **H**], е.т.е. (в силу (***a*3**)) $|SaP|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **C2**.

II. Пусть **A** имеет вид *SeP*.

Случай очевиден, так как условия значимости подобной формулы в обеих системах одинаковы, а перевод χ_1 преобразует ее саму в себя.

III. Случай, когда **A** имеет вид *SiP*, сводится к случаю (**II**).

IV. Случай, когда **A** имеет вид *SoP*, сводится к случаю (**I**).

V. Пусть **A** имеет вид $\neg$**B**.

$|\chi_1(\neg\mathbf{B})|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **СФ**, е.т.е. (по определению χ_1), $|\neg\chi_1(\mathbf{B})|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **СФ**, е.т.е. (в силу условий значимости негативных формул) $|\chi_1(\mathbf{B})|_\pi = \mathbf{0}$ в семантике **СФ**, е.т.е. (по индуктивному допущению) $|\mathbf{B}|_\pi = \mathbf{0}$ в семантике **C2**, е.т.е. (в силу условий значимости негативных формул) $|\neg\mathbf{B}|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **C2**.

VI. Пусть **A** имеет вид $\mathbf{B} \triangledown \mathbf{C}$.

Доказательство, как и в предыдущем случае, основывается на индуктивном допущении и условиях значимости формул, главными знаками которых являются пропозициональные связки. Таким образом, **Лемма 5** *доказана*.

Приступим к доказательству метатеоремы о семантической адекватности силлогистики **C2** сформулированной в данном параграфе интенсиональной семантике с базисными условиями (***a*3**), (***e*2**), (***i*2**) и (***o*3**):

Метатеорема 9.
Для любой силлогистической формулы **A** *верно, что* $\vdash_{C2}$ **A**, *е.т.е.* $\vDash_{C2}$ **A**.

В Главе III показано, что перевод χ_1 погружает систему **C2** в **СФ**, т.е. справедливо следующее утверждение:

(1) $\vdash_{C2}$ **A**, е.т.е. $\vdash_{СФ} \chi_1(\mathbf{A})$, для любой формулы **A**.

Выше была продемонстрирована адекватность системы **СФ** интенсиональной семантике с базисными условиями значимости формул (***a*2**), (***e*2**), (***i*2**) и (***o*2**). Следствием этого является утверждение:

(2) $\vdash_{СФ} \chi_1(\mathbf{A})$, е.т.е. $\vDash_{СФ} \chi_1(\mathbf{A})$, для любой формулы **A**.

Наконец, из только что доказанной леммы вытекает, что для произвольной формулы **A** верно: для любого π $|\chi_1(\mathbf{A})|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **СФ**, е.т.е. для любого π $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **C2**. Последнее равносильно следующему утверждению:

(3) $\vDash_{СФ} \chi_1(\mathbf{A})$, е.т.е. $\vDash_{C2}$ **A**, для любой формулы **A**.

Доказываемый тезис является непосредственным следствием утверждений (1), (2) и (3). **Метатеорема 9** *доказана*.

§5. Интенсиональная семантика силлогистики Больцано

Исследуем с интенсиональной точки зрения еще одну интересную систему силлогистики – исчисление **СБ**, формализующее позитивный силлогистический фрагмент дедуктивной логики Б. Больцано. Аксиоматика системы была задана в §2 Главы III.

Напомним, что согласно больцановской «экстенсиональной» семантической трактовке категорических суждений, субъект любого истинного высказывания – утвердительного или отрицательного, общего или частного – должен обязательно иметь непустой объем.

В интенсиональной семантике для больцановской силлогистики, сформулированной В.И. Маркиным [43], постулируются следующие условия значимости атомарных силлогистических формул:

(**a3**) $|SaP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \subseteq \pi(S)$ и $\pi(S) \in \mathbf{H}$;
(**i2**) $|SiP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \in \mathbf{H}$;
(**e4**) $|SeP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$ и $\pi(S) \in \mathbf{H}$;
(**o2**) $|SoP|_\pi = \mathbf{1}$, е.т.е. $\pi(P) \setminus \pi(S) \neq \varnothing$ и $\pi(S) \in \mathbf{H}$.

Понятие **СБ**-общезначимой формулы стандартное для рассмотренных семантик интенсионального типа.

Для доказательства адекватности системы **СБ** относительно интенсиональной семантики с данной трактовкой силлогистических констант рассмотрим перевод ψ_1, погружающий, как было показано в Главе III, данное исчисление в систему **СФ**:

$\psi_1(SaP) = SaP \,\&\, SiS$, $\psi_1(SiP) = SiP$,
$\psi_1(SeP) = SeP \,\&\, SiS$, $\psi_1(SoP) = SoP$,
$\psi_1(\neg\mathbf{A}) = \neg\psi_1(\mathbf{A})$, $\psi_1(\mathbf{A} \nabla \mathbf{B}) = \psi_1(\mathbf{A}) \nabla \psi_1(\mathbf{B})$.

Лемма 6.
Для любой формулы **A** *языка позитивной силлогистики и произвольной интерпретирующей функции* π *верно:* $|\psi_1(\mathbf{A})|_\pi = \mathbf{1}$ *в семантике* **СФ**, *е.т.е.* $|\mathbf{A}|_\pi = \mathbf{1}$ *в семантике* **СБ**.

В ходе доказательства, ведущегося индукцией по числу пропозициональных связок в формуле **A**, осуществляем разбор случаев по возможным видам этой формулы.

I. Случай, когда **A** имеет вид *SaP*, доказывается аналогично соответствующему случаю **Леммы 5**.

II. Пусть **A** имеет вид *SeP*.

$|\psi_1(SeP)|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **СФ**, е.т.е. (по определению ψ_1) $|SeP \,\&\, SiS|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **СФ**, е.т.е. (в силу (**e2**) и (**i2**)) $\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$ и $\pi(S) \cup \pi(S) \in \mathbf{H}$, е.т.е. $\pi(S) \cup \pi(P) \notin \mathbf{H}$ и $\pi(S) \in \mathbf{H}$, е.т.е. (в силу (**e4**)) $|SeP|_\pi = \mathbf{1}$ в семантике **СБ**.

III. Случай, когда **A** имеет вид *SiP* очевиден, так как условия значимости формулы этого типа в обеих системах одинаковы, а перевод ψ_1 преобразует ее саму в себя.

IV. Случай, когда **A** имеет вид *SoP*, разбирается аналогично предыдущему.

Остальные случаи рассматриваются так же, как и в **Лемме 5**. **Лемма 6** *доказана*.

Поскольку перевод ψ_1 погружает силлогистику **СБ** в **СФ** (см. Главу III), использованным при доказательстве **Метатеоремы 9** методом обосновывается адекватность силлогистики **СБ** интенсиональной семантике с базисными условиями (**a3**), (**i2**), (**e4**), (**o2**):

Метатеорема 10.
Для любой силлогистической формулы **A** *верно, что* $\vdash_{\mathbf{СБ}} \mathbf{A}$, *е.т.е.* $\models_{\mathbf{СБ}} \mathbf{A}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проделанное в данной работе исследование и полученные результаты позволяют сделать ряд выводов о том, что представляет собой силлогистика на современном этапе развития логики и развенчать целый ряд мифов, которые сложились относительно силлогистики.

1) Силлогистика в настоящее время является весьма обширным и разветвленным разделом дедуктивной логики, занимающимся исследованием логических свойств атрибутивных высказываний и корректных выводов из них. Совершенно очевидным стал факт отсутствия единственной, самой «хорошей» и «удачной» силлогистики. Последняя представляет собой множество логических систем, которые различаются, во-первых, выразительными возможностями языка (наличием или отсутствием в языке наряду с универсалиями сингулярных терминов и наряду с простыми – сложных терминов разного вида), во-вторых, семантикой элементарных формул (логических форм категорических высказываний), и в-третьих, множествами законов и способов правильных рассуждений.

2) Следование современным стандартам при построении систем силлогистики как исчислений, а также применение средств и методов из арсенала современной металогики позволяют в точных терминах осуществлять сравнение и устанавливать метатеоретические отношения между различными силлогистиками. При этом в их многообразии обнаруживается известное единство: целый ряд силлогистических теорий оказывается эквивалентным друг другу с точностью до определений исходных логических констант (или с точностью до переводов формул одной силлогистики в другую). Указанные факты были установлены, например, в Главе III для систем чистой позитивной силлогистики, в Главе V для подобных систем с нестандартными исходными константами и в Главе VI для систем чистой негативной силлогистики.

3) Доказательство погружаемости большого числа силлогистических теорий в стандартное первопорядковое исчисление предикатов и другие современные логические исчисления указывает на отсутствие какого-либо принципиального разрыва между старой (силлогистической) логикой и логикой новой (символической, математической). Особо наглядно об этом свидетельствует доказательство метатеоремы о дефинициальной эквивалентности расширенной силлогистики и элементарной булевой алгебры (см. §1 Главы IX), что прямо говорит о взаимной выразимости логических констант и законов данных теорий.

С этой точки зрения выглядит поспешным заявление Я. Лукасевича, согласно которому силлогистика – это особая теория, не сводимая к современной логике (кванторная теория, альтернативная классическому исчислению предикатов).

4) Такая позиция обусловлена, в частности, тем, что алгебраическим аналогом построенной Лукасевичем силлогистики (формализующей традиционную версию силлогистики, – системы **С4**, по терминологии В.А. Смирнова) действительно, как показал В.М. Попов [54], является не булева алгебра, а особая алгебраическая структура, которую В.М. Попов назвал квазибулевой алгеброй. Этот результат и все наше исследование развенчивают и еще одну весьма застарелую путаницу, когда традиционная силлогистика отождествляется с логикой самого Аристотеля. В первых главах монографии убедительно показано, что этот миф должен быть отброшен как абсолютно неверный.

5) Является также мифом и заявление Я. Лукасевича о том, что Аристотель, якобы, не допускал возможности построения сингулярной силлогистики. В работе наглядно продемонстрировано, как может быть построена сингулярная силлогистика в духе самого Аристотеля (в первых главах были приведены соответствующие тексты Стагирита, а в §1 Главы VII и в §3 Главы VIII осуществлены формальные реконструкции подобной силлогистики). Кроме того, были сформулированы сингулярные силлогистические исчисления и в духе У. Оккама, и в духе Ст. Лесневского.

6) Полученные результаты указывают также на принципиальную разрешимость многих рассмотренных силлогистических теорий, что определяется фактом их погружаемости в одноместное исчисление предикатов. Этот результат непосредственно вытекает из известного результата о разрешимости одноместного стандартного исчисления предикатов. Тем самым в качестве разрешающих процедур, устанавливающих, является ли некоторая силлогистическая формула законом той или иной системы, могут быть использованы хорошо известные разрешающие процедуры для формул одноместного классического исчисления предикатов.

7) В §2 Главы IX продемонстрировано, что элементарная онтология Лесневского и силлогистика представляют собой тесно связанные друг с другом логические теории. Более того, можно констатировать: *онтология Лесневского есть не что иное, как современный вариант силлогистики*. В этой связи отметим, что в онтологии Лесневского (сингулярной силлогистике особого типа) могут быть определены не только одноместные, но и многоместные предикаторы, а общая онто-

логия Лесневского содержит кроме того средства для построения выражений более высокого порядка, чем первый. Поэтому общая онтология (общая силлогистика) в духе Лесневского не беднее, чем известная теория типов Рассела.

8) В последней главе монографии заложены основы весьма перспективного направления в изучении силлогистических теорий, а именно, развит интенсиональный подход к их семантическому построению. Это открывает возможность вписать исследования по силлогистике в контекст активно ведущихся исследований в области современной интенсиональной логики.

9) Таким образом, в монографии была продемонстрирована метатеоретическая взаимосвязь силлогистики, булевой алгебры, исчисления предикатов (как в классическом, так и в неэкзистенциальном вариантах) и онтологии Лесневского. Тем самым убедительно показано *единство логики* как науки в различных ее разновидностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аристотель.* Сочинения в четырех томах. М.: Мысль, 1976, 1978, тт. 1, 2.

2. *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. М.: Соцэкгиз, 1960.

3. *Бежанишвили М.Н., Мчедлишвили Л.И.* Позитивная силлогистика и логика предикатов // Логика Аристотеля. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985.

4. *Бочаров В.А.* Алгебраические реконструкции силлогистики // Логико-методологические исследования. М.: Издательство МГУ, 1980.

5. *Бочаров В.А.* Булева алгебра в терминах силлогистики // Логические исследования, М.: ИФ АН СССР, 1983.

6. *Бочаров В.А.* Аристотель и традиционная логика. М.: Издательство МГУ, 1984.

7. *Бочаров В.А.* Интерпретация ассерторической силлогистики Аристотеля // Логика Аристотеля, Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985.

8. *Бочаров В.А.* Силлогистика с сингулярными терминами // Современная логика и методология науки. М.: Издательство МГУ, 1987.

9. *Бочаров В.А.* Дефиницнальная эквивалентность элементарной онтологии и силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М.: ИФ АН СССР, 1998.

10. *Бочаров В.А.* Модельные схемы традиционной силлогистики // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003

11. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Совещание по проблемам силлогистики // Философские науки. №3, 1983.

12. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистика и современная логика // Вестник МГУ, Сер. Философия, №1, 1987.

13. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. М.: ИД «Форум» - Инфра-М, 2008.

14. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М.: Наука, 1989.

15. *Джиджян Р.З.* Расширенная силлогистика. Ереван: Ерев. ГУ, 1977.

16. *Дубаков Д.В., Маркин В.И.* Система силлогистики с исходными константами, соответствующими круговым диаграммам // Труды

научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. Вып. XVIII. М.: ИФ РАН, 2007.

17. *Зайцев Д.В., Маркин В.И.* Воображаемая логика-2: реконструкция одного из вариантов знаменитой логической системы Н.А. Васильева // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН 1998. М.: ИФ РАН, 1999.

18. *Ильин А.А.* Негативная фундаментальная силлогистика // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. Вып. 15. М.: ИФ РАН, 2000.

19. *Ильин А.А.* Негативная силлогистика Л. Кэрролла // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VII Общероссийской научной конференции. 20–22 июня 2002. СПб.: Издательство СПбГУ, 2002.

20. *Ильин А.А.* Негативная силлогистика аристотелевского типа // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003.

21. *Ильин А.А.* Силлогистика Б. Больцано // Аспекты: Сборник статей по философским проблемам истории и современности. Выпуск II. М.: Современные тетради, 2003.

22. *Ильин А.А.*Аксиоматизация традиционной силлогистики // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке: Материалы VIII Общероссийской научной конференции. 24-26 июня 2004. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004.

23. *Карпинская О.Ю., Маркин В.И.* К вопросу об адекватной реконструкции ассерторической силлогистики Н. А. Васильева // XXI век: будущее России в философском измерении: Материалы Второго Российского философского конгресса: в 4 тт. Т. 1: Онтология, гносеология и методология науки, логика. Ч. 1. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 1999.

24. *Кедров Б.М.* О числе отношений множеств (понятий) // Логические исследования. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

25. *Колесников Н.Г.* Формализация силлогистики Льюиса Кэрролла // Логические исследования. М.: ИФ АН СССР, 1983.

26. *Колесников Н.Г.* О логических исследованиях Льюиса Кэрролла (к 150-летию со дня рождения) // Вестник МГУ. Сер. Философия, №3, 1983.

27. *Колесников Н.Г.* Теория суждений существования Льюиса Кэрролла и аристотелева силлогистика // Логика Аристотеля. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985.

28. *Костюк Т.П.* Позитивные силлогистики Васильевского типа // Логические исследования. Вып. 6. М.: РОССПЭН, 1999.

29. *Костюк Т.П., Маркин В.И.* Проблема реконструкции ассерторической силлогистики Н.А. Васильева // Международная конференция «Смирновские чтения». М.: ИФ РАН, 1997.

30. *Кэрролл Л.* Символическая логика // Кэрролл Л. История с узелками. М.: Мир, 1973.

31. *Лейбниц Г.В.* Сочинения в четырех томах. М.: Мысль, 1984.

32. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959.

33. *Маковельский А.С.* История логики. М.: Наука, 1967.

34. *Маркин В.И.* Семантическое доказательство погружаемости некоторых систем силлогистики в исчисление предикатов // Логические исследования. М.: ИФ АН СССР, 1983.

35. *Маркин В.И.* Формализация неаристотелевских силлогистик // Интенсиональные логики и логическая структура теорий. Тбилиси: Мецниереба, 1988.

36. *Маркин В.И.* Силлогистические теории в современной логике. М.: Издательство МГУ, 1991.

37. *Маркин В.И.* Сингулярная негативная силлогистика Аристотеля и свободная логика // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

38. *Маркин В.И.* Формальная реконструкция традиционной сингулярной негативной силлогистики // Логические исследования. Вып. 5. М.: Наука, 1998.

39. *Маркин В.И.* Системы силлогистики, адекватные двум переводам силлогистических формул в исчисление предикатов В. А. Смирнова // Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН 1997. М.: ИФ РАН, 1998.

40. *Маркин В.И.* Обобщенная позитивная силлогистика // Логические исследования. Вып. 6. М.: РОССПЭН, 1999.

41. *Маркин В.И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. Вып. 8. М.: Наука, 2001.

42. *Маркин В.И.* Фундаментальная силлогистика с интенсиональной точки зрения // Логические исследования. Вып. 9. М.: Наука, 2002.

43. *Маркин В.И.* Интенсиональная семантика для систем позитивной силлогистики // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003.

44. *Маркин В.И.* Фундаментальная силлогистика с неопределенноместной константой // Логические исследования. Вып. 11. М.: Наука, 2004.

45. *Маркин В.И.* Силлогистика с константами, соответствующими модельным схемам с универсумом // Смирновские чтения по логике. Материалы 5-й конференции. М.: ИФ РАН, 2007.

46. *Маркин В.И.* Позитивная силлогистика С3+ с константой исчерпываемости // Логические исследования. Вып.15. М.: Наука, 2010.

47. *Микеладзе З.Н.* Основоположения логики Аристотеля // Аристотель. Сочинения в четырех томах. Т. 2. М.: Мысль, 1978.

48. *Мчедлишвили Л.И.* Реконструкция метода экгезиса и системы позитивной силлогистики // Логика Аристотеля. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985.

49. *Мчедлишвили Л.И.* Позитивная ассерторическая силлогистика и логика одноместных предикатов // Логика и системные методы анализа научного знания. М.: ВИНИТИ, 1986.

50. *Мчедлишвили Л.И.* Ассерторическая силлогистика Аристотеля и логика одноместных предикатов // Методы логических исследований. Тбилиси: Мецниереба, 1987.

51. *Мчедлишвили Л.И.* Комплектная силлогистика // Семантический анализ неклассической логики. Тбилиси: Мецниереба, 1991.

52. *Попов В.М.* Разрешимость силлогистики с отрицательными терминами // Модальные и релевантные логики. М.: ИФ АН СССР, 1982.

53. *Попов В.М.* О расширении системы С2 «оккамовской силлогистики» // Нестандартные семантики неклассических логик. М.: ИФ АН СССР, 1986.

54. *Попов В.М.* Силлогистика и квазибулева алгебра // Логика и системные методы анализа научного знания (тезисы IX Всесоюзного совещания по логике, методологии и философии науки). М.: ВИНИТИ, 1986.

55. *Попов В.М., Хорохорин Н.И.* Диадические семантики для систем С1 и С3 формальной силлогистики // Логические исследования. Вып. 4. М.: Наука, 1997.

56. *Попов В.М., Хорохорин Н.И.* Диадические семантики для систем формальной силлогистики // Логические исследования. Вып. 5. М.: Наука, 1998.

57. *Попов П.С., Стяжкин Н.И.* Развитие логических идей от античности до эпохи Возрождения. М.: Издательство МГУ, 1974.

58. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.

59. *Смирнов В.А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчисление предикатов // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев: Наукова думка, 1980.

60. *Смирнов В.А.* Дефинициальная эквивалентность расширенной силлогистики С2Д булевой алгебре // Логические исследования. М.: ИФ АН СССР, 1983.

61. *Смирнов В.А.* Погружение систем позитивной силлогистики в одноместное исчисление предикатов // Логические исследования. М.: ИФ АН СССР, 1983.

62. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987.

63. *Смирнов В.А.* Аксиоматизация логических систем Н.А. Васильева // Современная логика и методология науки. М.: Издательство МГУ, 1987.

64. *Смирнов В.А.* Логические идеи Н.А. Васильева и современная логика // Н.А. Васильев. Воображаемая логика. М.: Наука, 1989.

65. *Смирнов В.А.* Дефинициальная эквивалентность элементарной онтологии и обобщенной силлогистики оккамовского типа // Логические исследования. Вып. 2. М.: Наука, 1993.

66. *Смирнов В.А.* Дефинициальная эквивалентность систем силлогистики // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН (1993). М.: ИФ РАН, 1994.

67. *Стяжкин Н.И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.

68. *Субботин А.Л.* Теория силлогистики в современной формальной логике. М.: Наука, 1965.

69. *Федоров Б.И.* Логика Бернарда Больцано. Л.: Издательство ЛГУ, 1980.

70. *Федоров Б.И.* Особенности силлогистических выводов в дедуктивной теории Б. Больцано // Логика Аристотеля. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1985.

71. *Шиян Т.А.* Формально-историческое исследование нескольких групп формальных силлогистик // Логика и В.Е.К. М.: Современные тетради, 2003.

72. *Corcoran J.* Completeness of an ancient logic // The Journal of Symbolic Logic. Vol. 37, 1972.

73. *Corcoran J.* A mathematical model of Aristotele's syllogistic // Archiv fur Geschichte der Philosophie. N. 55, 1973.

74. *De Morgan A.* Formal Logic or the Calculus of Inferense, Nesessary and Probable. London: Taylor and Walton, 1847.

75. *Hamilton W.* Lectures on Metaphisics and Logic. Vol.II. Logic. Boston: Gould and Lincoln, 1863.

76. *Iwanuś B.* Remarks about syllogistic with negative terms // Studia Logica. T. 24, 1969.

77. *Iwanuś B.* On Lesniewski's elementary ontology // Studia Logica. T. 31, 1973.

78. *Jaśkowski S.* On the interpretations of Aristotelian categorical propositions in the predicate calculus // Studia Logica. T. 24, 1969.

79. *Lejewski C.* Aristotle's syllogistic and its extentions // Synthese. Vol. 15, No. 2, 1965.

80. *Miller J.W.* The structure of Aristotelian Logic. London: Kegan Paul, Trench, Trench, Co., Ltd., 1938.

81. *Prior A.N.* Formal Logic. Oxford: Clarendon Press, 1955.

82. *Shepherdson J.C.* On the Interpretation of Aristotelian Syllogistic // Journal of Symbolic Logic. Vol. 21, No.2, 1956.

83. *Słupecki J.* Z badań nad sylogistyka Arystotelesa // Travaux de la Société des Sciences et des lettres de Wroclaw. Ser. B, No. 9, Wroclaw, 1948.

84. *Słupecki J.* St. Lesniewski's calculus of names // Studia Logica. T. 3, 1955.

85. *Smiley T.I.* Syllogism and quantification // Journal of Symbolic Logic. Vol. 27, 1962.

86. *Smiley T.I.* What is a syllogism? // Journal of Philosophical Logic, No.2, 1973.

87. *Smith H.B.* A further note on subalternation and the syllogistic moods // The Journal of Philosophy. Vol. 21, 1924.

88. *Strawson P.F.* Introduction to Logical Theory. London: Methuen, 1952.

89. *Thom P.* The syllogism. München: Philosophia Verlag, 1981.

90. *Venn J.* Symbolic Logic. London: Macmillan and Co, 1881.

91. *Viery S.* Alternative formulations for Aristotle's syllogistic // Revue Roumaine des Sciences Socials. Serie Philosophic et Logique, No. 3, 1970.

92. *Viery S.* Embedding of assertoric syllogictic into the predicate calculus // 4-th International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. Bucharest, 1971.

93. *Viery S.* The connection of assertoric syllogictic with other systems of logic // Revue Roumaine des Sciences Socials, serie Philosophic et Logique, No. 2, 1971.

94. *Wedberg A.* The Aristotelian theory of classes // Ajatus. Vol.15, 1948.